МАСТЕРСКАЯ учителя математики

А. В. Фарков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ: методика подготовки

- Основные направления подготовки
- Занятия математического кружка
- Разбор типичных задач
- Тексты муниципальных олимпиад

$$S = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}a^2$$

5–8 КЛАССЫ

МАСТЕРСКАЯ учителя математики

А. В. ФАРКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ

5–8 классы

МОСКВА • «ВАКО» • 2012

УДК 372.851
ББК 74.262.21+22.1я721
Ф24

Фарков А.В.

Ф24 Математические олимпиады: методика подготовки: 5–8 классы. – М.: ВАКО, 2012. – 176 с. – (Мастерская учителя математики).

ISBN 978-5-408-00722-6

Пособие посвящено методике подготовки к олимпиадам по математике учащихся 5–8 классов. Среди разнообразных направлений подготовки подробно рассмотрена методика организации и проведения школьного математического кружка. Предложены подробные разработки 17 кружковых занятий, основой которых является решение олимпиадных задач. В приложении даны варианты муниципальных олимпиад по математике для учашихся 5–8 классов.

Книга адресована как учителям математики, так и учащимся. Она будет полезна также студентам педвузов.

УДК 372.851
ББК 74.262.21+22.1я721

ISBN 978-5-408-00722-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Умение решать задачи, особенно олимпиадные, всегда являлось одним из показателей математической одаренности ученика. Причем главная ценность самих олимпиад состоит не в выявлении победителей и награждении особо одаренных учащихся, а в общем подъеме математической культуры, интеллектуального уровня учащихся.

И для того чтобы этот подъем культуры и интеллекта действительно произощел, к математическим олимпиадам учашихся надо готовить.

Тем более что сегодня часто по итогам олимпиад оценивают итоги внеклассной и внешкольной работы по математике в школе, районе, регионе. Школьные, районные, региональные олимпиады по математике, наряду с результатами ЕГЭ, позволяют сравнивать качество математической подготовки, оценивать состояние преподавания математики в отдельных классах школы, в отдельных щколах района, а также и в различных регионах России. Также сегодня во многом результаты работы учителя определяются и тем, каких и сколько учащихся — призеров различного рода олимпиад он подготовил.

Между тем природа может распорядиться так, что в данном регионе, в данном месте не окажется одаренных детей, и что бы учитель ни предпринимал, все может быть безрезультатно.

С другой стороны, учитель математики может не предпринимать никаких особых усилий, а ученик блистает на различных соревнованиях, и прежде всего на олимпиадах самого высокого уровня. Он добивается этого благодаря своим особым математическим способностям, которые он продолжает развивать, работая с математической литературой самостоятельно, занимаясь на всевозможных математических курсах, в школах при вузах и т. п. Иногда ему в этом помогает учитель из другой школы или преподаватель вуза.

Здесь не хотелось бы дискутировать: правильно делает руководство образованием, оценивая только результат, а не то, как достиг этого результата учитель. Для нас важнее то, как учителю математики не только готовить учащихся к олимпиадам, но и сделать все от него зависящее для математического развития учащихся.

В настоящее время на основе последней редакции Закона «Об образовании» победы учащихся на олимпиадах международного и всероссийского уровней являются достаточным основанием для зачисления в вуз без экзаменов, а выдающиеся результаты, показанные в мероприятиях системы дополнительного образования, — для приема в вуз вне конкурса.

Интересно, что почти все российские математики, получившие крупные международные премии в последние годы, были победителями разного уровня олимпиад. При этом решение некоторых математических проблем, над которыми многие годы бились математики всего мира, иногда удавалось найти именно с помощью «олимпиадных» приемов. В частности, именно так были решены 10-я проблема Гильберта Ю. В. Матиясевичем и проблема Сера А. А. Суслиным. В 2010 г. медаль Филдса — математический аналог Нобелевской премии — получил российский математик из Петербурга С. Смирнов, в настоящее время работающий в университете в Женеве. Неоднократным победителем всероссийских и международных математических олимпиад был и Г. Перельман, доказавший гипотезу Пуанкаре.

Школа сегодня уже не является единственным, монопольным источником информации, знаний, умственного развития учащихся. В частности, большой вклад в образование учащихся вносит система дополнительного образования детей. А поэтому результаты, достигаемые учащимися в различных мероприятиях, проводимых в данной системе, должны учитываться при определении перспектив дальнейшего обучения.

Так как наибольших успехов в олимпиадах добиваются учащиеся с нестандартным, творческим мышлением, высокими математическими способностями, повышенной обучаемостью к математике, то одним из путей подготовки учащихся к олимпиадам является развитие их математических способностей, мышления, интеллекта. Давно известно, что люди, систематически занимающиеся умственным трудом, имеют более высокий показатель интеллекта.

Данное пособие посвящено подготовке учащихся к математическим олимпиадам. В первом разделе рассмотрены основные направления, которые можно выделить в подготовительной работе к олимпиадам. Второй раздел посвящен методике подготовки и проведения занятий по математике, целью которых является подготовка к олимпиадам. В третьем разделе приведены разработки 17 занятий по математике для учащихся 6–7 классов (при этом часть занятий можно провести и для учащихся 5 и 8 классов), каждое из занятий рассчитано на 80–90 минут. Необходимо отметить, что все разработанные занятия лично проводились автором в г. Коряжме Архангельской области в 2004–2005 годах.

В приложении приводятся тексты муниципальных олимпиад по математике в Архангельской области 1999–2005 годов.

Все пожелания, замечания по данной книге можно высылать лично автору: a.farkov@mail.ru.

Раздел 1
ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

I. РАБОТА УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКЕ

Глубоко не правы те учителя, которые не уделяют внимания при проведении уроков математики подготовке учащихся к олимпиадам. Чаще победителями олимпиад, начиная с городского (районного) тура, являются одаренные учащиеся. Учить же, развивать одаренных детей только вне урока нереально. Всегда можно найти время на уроке, когда вместе с обучающими задачами на уроке можно решать и задачу развития ученика. Например, при изучении темы «Объемы тел» (11 класс) после решения ряда задач по нахождению объема пирамиды можно предложить учащимся и такую задачу: «Найдите объем пирамиды, у которой все боковые ребра образуют между собой углы по 90°, а сами ребра имеют длины соответственно 6, 8, 10 см». Применяя подход, которым решались предыдущие задачи, можно найти стороны основания (по теореме Пифагора), затем площадь основания. Проблема возникнет при нахождении высоты пирамиды. Применив же нестандартный прием: переворачивание пирамиды таким образом, что основанием становится один из прямоугольных треугольников, а высотой — оставшееся третье ребро, мы сразу решим задачу. Подобного рода примеров можно привести много. Все они тесно связаны с темой урока, тем не менее являются и олимпиадными задачами. Интересно, что термин ***олимпиадная задача*** появился не в результате классификации задач, а в результате практики применения особых видов задач для составления текстов олимпиадных работ.

Что же понимать под олимпиадными задачами? Обычно авторы методических работ не дают четкого определения олимпиадной задачи. Большинство их считают это понятие общеизвестным, другие относят к олимпиадным задачам те, где есть идея решения, где применяются специальные методы решения и т. д. В дальнейшем будем придерживаться следующего определения олимпиадных задач по математике.

Под ***олимпиадными задачами по математике*** будем понимать задачи повышенной трудности, нестандартные по формулировке или по методам их решения.

При таком подходе к определению в число олимпиадных задач попадут как нестандартные задачи по математике, использующие необычные идеи и специальные методы решения, так и стандартные задачи, но допускающие более быстрое, оригинальное решение.

Так как классификацию олимпиадных задач построить трудно (есть задачи, которые затруднительно отнести к какому-то виду, они могут и не иметь аналогов; тем более с каждым годом появляются благодаря работе методистов и математиков все новые виды олимпиадных задач), то будем рассматривать в дальнейшем следующие основные типы олимпиадных задач по математике:

- *задачи на применение специальных методов решений* (применение принципа Дирихле, метода инвариантов, метода раскрасок, графов и др.);
- *задачи, использующие программный материал, но повышенной трудности* (арифметические задачи, алгебраические задачи, геометрические задачи);
- *комбинированные задачи, то есть те, которые используют программный материал и идеи, изучаемые на кружках, факультативах.*

Рассмотрим, как можно организовать работу с олимпиадными задачами по математике на уроке.

1. Решение олимпиадных задач, тесно связанных с темой урока

1. Вычислите: а) $90+89+88+\ldots+1+0-1-2-\ldots-90-91-$ $-92-93$;

б) $1-2+3-4+5-6+\ldots+2012-2013$.

Обе приведенные задачи являются стандартными, но, если выполнять действия по порядку, не применяя законов сложения и вычитания, на это потребуется много времени. А время на олимпиадах очень ценно. Поэтому ученик, нашедший более быстрое решение этих и подобных заданий, сэкономит время на решение других задач. На уроке данные задачи можно предложить при изучении темы «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел».

2. При изучении темы «Степень с натуральным показателем» можно предложить для решения учашимся следуюшие типы задач.

а) Сравните: 65^{23} и 255^{17}.

б) На какую цифру оканчивается число 2007^{2014}?

Решение.

а) $65^{23} > 64^{23} = (2^6)^{23} = 2^{138}$. А

$$255^{17} < 256^{17} = (2^8)^{17} = (2^{136}).$$

Так как

$$65^{23} > 2^{138}, \quad 2^{138} > 2^{136},$$

а $2^{136} > 255^{17}$, то $65^{23} > 255^{17}$.

б) Так как последняя цифра числа 2007^{2014} определяется последней цифрой числа 7^{2014}, то найдем значения степеней 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 и т.д. и заметим закономерность: последней цифрой являются 7, 9, 3, 1, а далее они повторяются. Так как $2014 = 503 \cdot 4 + 2$, то 7^{2014} оканчивается той же цифрой, что и 7^2, то есть цифрой 9. Тогда и число 2007^{2014} оканчивается на цифру 9.

3. При изучении темы «Алгебраические дроби» можно решить следующую задачу: «Вычислите сумму:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

если $xyz = 1$».

Решение. Умножим числитель и знаменатель второй дроби на x, а третьей — на xy. Учитывая, что $xyz = 1$, получим у всех дробей одинаковые знаменатели. Сложим данные три дроби, в итоге получим дробь, у которой числитель и знаменатель равны одному и тому же выражению $1 + x + xy$. А значит, искомая сумма равна 1.

4. При изучении квадратных уравнений, можно наиболее сильным учащимся класса предложить и такую задачу: «Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2014? А 2016?»

Рассмотрим решение данной задачи.

У квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Так как $D = 2014$, то найдем целые решения уравнения $b^2 - 4ac = 2014$. Так как правая часть уравнения делится на 2, то и левая часть должна делиться на 2, поэтому $b = 2k$, тогда $4k^2 - 4ac = 2014$. Разделив обе части уравнения на 2, получим: $2k^2 - 2ac = 1007$. В левой части уравнения получилось четное число, а в правой — число нечетное. Поэтому уравнение решений в целых числах не имеет.

Для числа 2016 имеем $b^2 - 4ac = 2016$, а так как $b = 2k$, то получим: $4k^2 - 4ac = 2016$. Разделив на 4 обе части уравнения, получим: $k^2 - ac = 504$. Данное уравнение имеет решения в целых числах, например: $a = 1$, $c = 25$, $k = 23$. Тогда уравнение $x^2 + 46x + 25 = 0$ имеет дискриминант

$$D = 2116 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 2016.$$

Конечно, можно найти и другие решения.

На этом же занятии можно сказать, что с методами решения уравнений в целых числах подробно можно познакомиться на занятии факультатива или элективного курса (если, конечно, факультативы или элективные курсы по математике проводятся в данной школе).

5. При изучении арифметической прогрессии можно рассмотреть задачу: «Докажите, что если в бесконечную арифметическую прогрессию с положительной разностью входят числа 25, 43, 70 (не обязательно стоящие рядом), то в эту прогрессию входит и число 2005».

Решение. Так как 25, 43, 70 — члены арифметической прогрессии, то

$$25 = a_1 + kd; \quad 43 = a_1 + nd; \quad 70 = a_1 + md.$$

Из данных трех равенств следует, что

$$18 = (n - k)d, \quad 27 = (m - n)d.$$

Из данных двух равенств получаем: $9 = (m - 2n + k)d$. Так как $2005 = 70 + 1935$, а $1935 = 215 \cdot 9 = 215(m - 2n + k)d$, то

$$2005 = 70 + 215(m - 2n + k)d = a_1 + md + 215(m - 2n + k)d = \\ = a_1 + (216m - 430n + 215k)d$$

или $2005 = a_1 + ld$, где $l > 0$.

6. При решении текстовых задач в различных классах можно предлагать учащимся решение и задач, которые были на олимпиадах различного уровня, обязательно указывая, сколько учеников их решили.

Например.

а) Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалось проехать треть пути до B. Мотоциклист, доехав до B, без остановки поехал обратно в A. Кто приедет раньше: мотоциклист в A или велосипедист в B, если велосипедист после первой остановки больше в пути не останавливался?

Решение. Так как велосипедист стоял, дожидаясь, пока мотоциклисту останется проехать треть пути до B, то на треть всего своего пути велосипедист затратил времени меньше, чем мотоциклист на треть своего ($\frac{2}{3}AB$ от $2AB$ составляют $\frac{1}{3}$). Значит, и на весь путь велосипедист затратит времени меньше.

б) Одну овцу лев съел за 2 дня, волк — за 3 дня, собака — за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

Решение.

1) Так как лев съел овцу за 2 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{2}$ овцы.

2) Так как волк съел овцу за 3 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{3}$ овцы.

3) Так как собака съела овцу за 6 дней, то за 1 день она съела $\frac{1}{6}$ овцы.

4) Вместе лев, волк и собака за 1 день съедят $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, то есть 1 овцу.

в) *Старинная задача.* «Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть три женщины».

Решение. Обозначив число учеников Пифагора за x, получим, что $\frac{1}{2}x$ изучает математику, $\frac{1}{4}x$ — музыку, а $\frac{1}{7}x$ пребывает в молчании. Так как, кроме того, есть еще 3 женщины, то получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x.$$

Решением данного уравнения будет $x = 28$. Следовательно, школу Пифагора посещают 28 учеников.

Наибольшие трудности у учеников на олимпиадах, как показывает собственный опыт участия в олимпиадах разного уровня, а также проведения школьных и городских олимпиад, вызывают геометрические задачи. Хотя именно геометрия прекрасно развивает нестандартное мышление и выделяет людей, способных заниматься математикой. Данный тип олимпиадных задач является самым обширным. Это задачи и на разрезания, и на построение, и на нахождение углов. Но чаще всего встречаются задачи, в решении которых используют какую-то необычную идею, чаще всего дополнительное построение.

Рассмотрим несколько примеров олимпиадных задач по геометрии, которые можно разобрать на уроке, увязав их решение с темой урока.

7. При изучении геометрических построений можно предложить задачи на построение углов заданной градусной меры через известный угол. Например:

«Построить угол в 5°, если дан угол в 34°».

Решение. Если отложить 5 раз угол, равный 34°, то получится угол, равный 170°. Так как разность развернутого угла и угла, равного 170° будет равна 10°, то разделим угол в 10° на 2 равных угла и получим угол в 5°.

8. Так как на олимпиадах часто предлагают задачи, в которых используются дополнительные построения, то подобного рода задачи необходимо рассматривать и на уроках, особо обращая внимание на эти дополнительные построения. Например, рассмотрим такую задачу: «Дан параллелограмм $ABCD$. K — середина стороны BC, M — середина стороны CD, $AK = 6$ см, $AM = 3$ см, $\angle KAM = 60°$. Найдите длину стороны AD. Ответ обоснуйте».

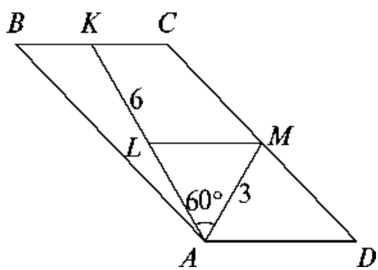


Рис. 1

Решение. Задача имеет множество решений. Рассмотрим наиболее оригинальное. Проведем в трапеции $AKCD$ среднюю линию ML (рис. 1). Она будет параллельна AD и KC, причем $AL = 3$ см. Получается, что треугольник ALM равнобедренный с углом при вершине 60°, поэтому он равносторонний, поэтому $LM = 3$ см. Обозначим $AD = 2x$, тогда $KC = x$. А тогда, используя свойство средней линии трапеции, имеем: $\frac{2x + x}{2} = 3$, откуда $x = 2$, а значит, $AD = 4$ см.

Так как решение подобного рода задач требует применения определенных качеств и приемов мышления, то на уроке необходимо уделять внимание и развитию как некоторых качеств ума (прежде всего, гибкости и глубины), так и приемов умственной деятельности (в первую очередь анализа, так как он чаще всего применяется в олимпиадных задачах, особенно геометрических).

2. Развитие качеств ума и совершенствование приемов умственной деятельности

Для развития *гибкости ума* на уроке надо:

- применять решение упражнений, в которых встречаются взаимно обратные операции;
- решать задачи несколькими способами, доказывать теоремы различными методами;
- применять различные переформулировки условия задачи;
- учить переключению с прямого хода мыслей на обратный;
- учить тому, какие знания, умения, навыки и в каком порядке применять в конкретной задаче и т. д.

Рассмотрим примеры задач, способствующих развитию данного качества.

Упражнения на развитие гибкости ума

1. У двух зрячих один брат слепой, но у слепого нет зрячих братьев. Как это может быть? (Из первой фразы как будто следует, что речь в задаче идет о братьях, тогда как на самом деле зрячими оказываются сестры.)

2. Два ученика подошли одновременно к реке. У берега реки стояла лодка (лишь для одного человека). Тем не менее оба сумели переправиться через реку в одной лодке. Каким образом? (Из первой фразы как будто кажется, что ученики подошли к реке на одном берегу, но для решения задачи получается, что они подошли к реке на разных берегах.)

3. Вам дано 5 спичек. Сложите из них 2 равносторонних треугольника. А если спичек будет 6, то сколько равносторонних треугольников вы можете сложить? Первая задача решается на плоскости (тогда получаются 2 равносторонних треугольника), а вторая — в пространстве (тогда получаются 4 равносторонних треугольника).

4. Найдите как можно больше способов решения задач.

А. Докажите, что треугольник, в котором медиана равна половине стороны, к которой она проведена, является прямоугольным.

Решение.

Способ № 1.

Пусть BD — заданная медиана треугольника ABC (рис. 2). Имеем тогда следующие соотношения для углов:

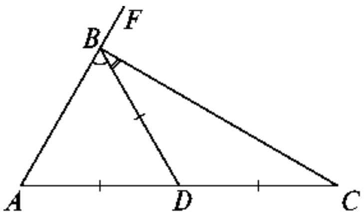


Рис. 2

1) $\angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle C = 180°$.

2) $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$.

3) $\angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle C = 2 \cdot \angle ABD + 2 \cdot \angle DBC =$
$= 2(\angle ABD + \angle DBC) = 2 \cdot \angle ABC = 180°$.

4) $\angle ABC = 90°$, а значит, $\triangle ABC$ прямоугольный.

Вывод. При доказательстве использовались теорема о сумме углов треугольника и свойство углов при основании равнобедренного треугольника.

Способ № 2.

1) Рассмотрим треугольник ABD. $\angle BDC = \angle A + \angle ABD$.

2) Рассмотрим треугольник DBC. $\angle ADB = \angle C + \angle DBC$.

3) В треугольнике ABD имеем $\angle A = \angle ABD$.

4) В треугольнике DBC имеем $\angle C = \angle DBC$.

5) $\angle ADB + \angle BDC = 180°$.

6) $\angle ADB + \angle BDC = \angle A + \angle ABD + \angle C + \angle DBC =$
$= 2 \cdot (\angle ABD + \angle DBC) = 180°$. А значит, $\angle ABD + \angle DBC =$
$= \angle B = 90°$.

Вывод. В данном способе использовались теорема о внешнем угле треугольника, свойство углов при основании равнобедренного треугольника, теорема о смежных углах.

Способ № 3.

Пусть AF — прямая, содержащая сторону AB (см. рис. 2). Имеем тогда следующие соотношения для углов:

1) $\angle FBC = \angle A + \angle C$.

2) $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$.

3) $\angle FBC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$.

4) $\angle FBC + \angle ABC = 180°$, $\angle FBC = \angle ABC \Rightarrow \angle ABC = 90°$.

Вывод. Применялись те же рассуждения, что и во втором способе, но в других комбинациях.

Б. Высоты треугольника ABC, проведенные из точек A и C, пересекаются в точке M. Найдите угол AMC, если $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$.

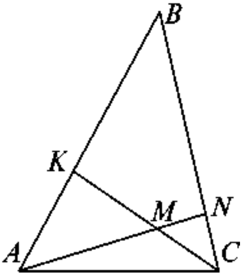


Рис. 3

Решение.

Способ № 1. Рассмотрим прямоугольные треугольники AKC и ANC (рис. 3). Из треугольника AKC находим $\angle KCA = 90° - 70° = 20°$. Из треугольника ANC находим $\angle NAC = 90° - 80° = 10°$. Рассмотрим треугольник AMC и найдем $\angle AMC = 180° - (20° + 10°) = 150°$.

Способ № 2. Рассмотрим треугольник ABC. Имеем: $\angle B = 180° - (80° + 70°) = 30°$. Из треугольника KCB находим $\angle KCB = 90° - 30° = 60°$. Из треугольника MNC находим $\angle NMC = 90° - 60° = 30°$. Так как углы NMC и AMC смежные, то $\angle AMC = 180° - 30° = 150°$.

Способ № 3. Из треугольника ABC находим $\angle B = 30°$. Из треугольника ABN находим $\angle BAN = 90° - 30° = 60°$. Из треугольника AKM находим $\angle KMA = 90° - 60° = 30°$. Так как углы KMA и AMC смежные, то $\angle AMC = 150°$.

Способ № 4. Из треугольника ABC находим $\angle B = 30°$. Так как

$$\angle KBN + \angle BNM + \angle NMK + \angle MKB = 360°$$

(данный факт легко доказывается, если провести диагональ в четырехугольнике $KBNM$), то

$$\angle KMN = 360° - 90° - 90° - 30° = 150°.$$

А так как углы KMN и AMC вертикальные, то $\angle AMC = 150°$.

5. Чему равен угол между биссектрисами вертикальных углов? А смежных углов? (Изменение содержания задачи развивает гибкость ума.)

6. Вычислите:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}; \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{8}; \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}.$$

(Первые 3 примера одного типа, а четвертый — другого. Для решения четвертого примера необходимо перестроить умственную деятельность.)

7. Решите задачу «За 18 дней бригада лесорубов в составе 15 человек заготовила 972 м^3 дров. Сколько дров заготовит бригада из 12 человек за 25 дней при такой же производительности труда?». Поставьте новый вопрос к задаче. Измените в соответствии с ним условие исходной задачи и решите новую задачу. Найдите другой способ только что решенной задачи.

8. Измените условие задачи: «Докажите, что каждый из углов равностороннего треугольника равен 60°» — таким образом, чтобы в условии были те же понятия, что и в заключении. (Видоизменение задачи развивает гибкость ума.)

Для развития *глубины ума* на уроке надо учить учащихся:

- выделять главное отношение в задаче;
- выделять существенные признаки понятия;
- вычленять ведущие закономерные отношения явлений;
- отделять главное от второстепенного, извлекать из текста не только то, что в нем сказано, но и то, что содержится между строк;
- видеть главные причины происходящего, объяснять их сущность и т. д.

Рассмотрим примеры задач, способствующих развитию данного качества.

Упражнения на развитие глубины ума

1. Известно, что сложению соответствует одно обратное действие — вычитание; аналогично для умножения

обратным действием является деление. Почему же действие возведение в степень имеет два себе обратных: извлечение корня и логарифмирование? (Для возведения числа в степень переместительный закон не действует, в отличие от сложения и умножения.)

2. Является ли последовательность вида $3, 3, 3, \ldots$ арифметической прогрессией? А геометрической?

3. Подчеркните наиболее общее понятие:
медиана, отрезок, хорда, средняя линия треугольника.

4. Выделите основное соотношение в задаче: «Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 660 км. Через 4 часа они встретились. Найдите скорость каждого поезда, если скорость одного на 15 км/ч больше скорости другого».

5. Выделите существенные признаки понятий «равнобедренный треугольник», «ромб».

Иногда одна и та же задача может развивать различные качества ума.

Упражнения на развитие нескольких качеств ума

1. Вася живет на 5-м этаже 12-этажного дома. Он решил покататься на лифте. Сначала он поднялся на 2 этажа, потом опустился на 4 этажа, потом поднялся на 6 этажей, потом опустился на 10 этажей, потом вновь поднялся на 3 этажа. На каком этаже в итоге оказался Вася? (Развитие осознанности и гибкости ума.)

Решение. $5 + 2 - 4 + 6 - 10 + 3 = 2$, но в процессе решения получалось $5 + 2 - 4 + 6 - 10 = -1$. Так как в процессе решения получилось -1, то в задаче есть противоречивые данные. Но, если под -1-м этажом дома понимать подвал, то все получается. Ведь лифт может опускаться иногда и в подвал!

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 2 см. Чему равна гипотенуза треугольника? (Развитие осознанности и глубины ума.)

Решение. Известно, что $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (см^2). Но $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot c = c$, поэтому $c = 6$ (см). Однако по теореме

Пифагора $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ (см). Это задача с противоречивыми данными в условии. Противоречие можно получить и другим способом, найдя длины отрезков, на которые основание высоты разбивает гипотенузу.

3. Докажите тождество (числа a, b, c различны):

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

Если рассмотреть данное тождество как уравнение относительно переменной x (а это уравнение будет не выше второй степени), мы получим, что три значения: $x = a$, $x = b$, $x = c$ — удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, данное равенство является тождеством.

При таком решении данной задачи развиваются гибкость, глубина, критичность и другие качества ума.

Рассмотренные качества ума: гибкость, глубина и другие — являются основными составляющими такой интеллектуальной особенности, как обучаемость учащихся математике, которую можно развивать как на уроке, так и вне урока. Основной путь развития этой интеллектуальной особенности через применение на уроке различных нестандартных и олимпиадных задач мы рассмотрели.

Важным и необходимым условием повышения уровня обучаемости учащихся математике является и совершенствование приемов умственной деятельности.

Рассмотрим основные типы упражнений на эту тему.

Для развития умения *анализировать* необходимо:

- применять дополнительные построения, нестандартные идеи для решения той или иной задачи;
- обучать применению нисходяшего и восходящего анализа для решения задач;
- обучать нахождению достаточных признаков справедливости заключения, отбирать требуемый признак для решения задачи и т. д.

Приведем примеры упражнений для развития этого важного приема умственной деятельности.

Упражнения на развитие умения анализировать

1. Можно ли треугольник разбить двумя прямыми на:

а) 5 треугольников;

б) 8 треугольников?

2. Можно ли разбить равнобедренный треугольник на:

а) 4;

б) 5;

в) 6;

г) 7;

д) 2012;

е) 2013 равнобедренных треугольников?

Если можно, то покажите как.

3. Может ли угол при основании равнобедренного треугольника равняться 95°?

4. Каков вид треугольника, если:

а) один из его углов больше суммы двух других углов;

б) сумма любых его двух углов больше 90°?

5. Что достаточно знать, чтобы утверждать, что на рис. 4 треугольники *CAO* и *BDO* равны?

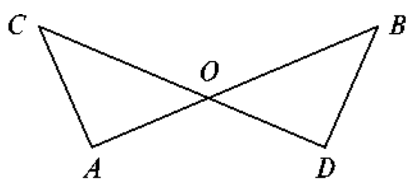


Рис. 4

Приведем примеры упражнений, предназначенных для развития других приемов умственной деятельности.

Упражнения на развитие умения классифицировать

1. Выделите основные типы задач по изученной теме «Проценты».

2. Постройте различные классификации четырехугольников.

3. Вычеркните одно лишнее слово:
параллелограмм, ромб, трапеция, квадрат, прямоугольник.

4. Исключите из пяти данных на рис. 5 геометрических объектов лишний.

Рис. 5

Упражнения на развитие умения сравнивать

1. Сравните параллелограмм и трапецию.
2. Сравните треугольник и тетраэдр.
3. Что общего у прямоугольника и ромба?
4. В чем отличие равностороннего треугольника от квадрата? А чем они похожи?
5. Посмотрите на рис. 6 и скажите, что общего у изображенных фигур и в чем их отличие.

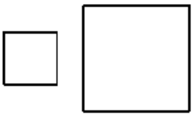


Рис. 6

6. Какая из изображенных фигур на рис. 7 отличается от остальных и чем отличается?

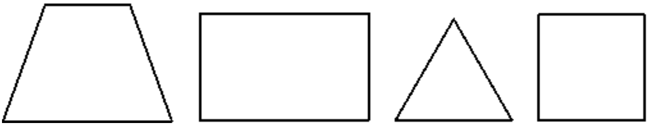


Рис. 7

Упражнения на развитие умения абстрагировать

1. Выберите из пяти предложенных математических терминов: *прямые*, *отрезки*, *лучи*, *точка*, *треугольник* — два, которые бы наиболее точно определяли понятие *угол*.
2. Выделите существенные признаки понятия «треугольник».

Упражнения на развитие умения проводить аналогии

1. Решите задачу способом, аналогичным способу решения предыдушей задачи.

2. Найдите четвертое понятие, которое бы так соотносилось с третьим понятием, как первое со вторым: *угол — вершина угла*; *окружность* — ?

3. На рис. 8 в верхнем ряду изображены три фигуры. Подумайте, как связаны первые две из них, и укажите в наборе (а–г) четвертую фигуру, которая точно так же связана с третьей.

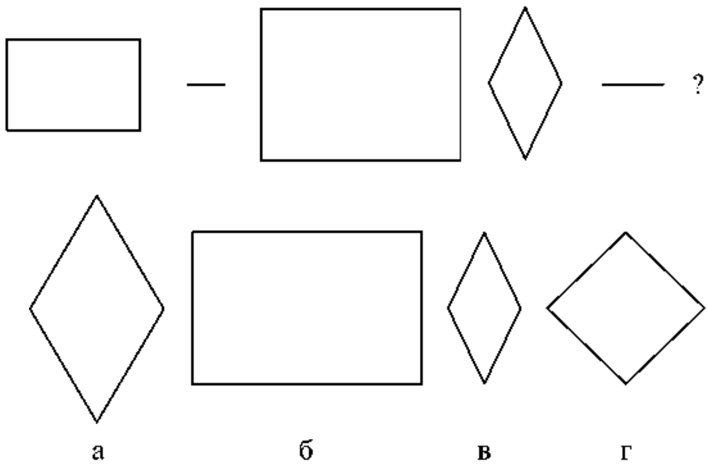


Рис. 8

Известно, что между приемами умственной деятельности и качествами ума есть связь. Совершенствование некоторых приемов умственной деятельности способствует и развитию определенных качеств ума. Например, предлагая задачи для развития приемов «анализ» и «синтез», мы способствуем развитию гибкости ума, и наоборот, развивая гибкость ума, мы способствуем развитию приемов «анализ» и «синтез». Формирование же приемов абстрагирования и обобшения способствует развитию глубины ума.

Есть, конечно, и другие пути развития обучаемости учашихся математике, но это уже отдельный разговор.

3. Другие виды подготовительной работы учителя математики к олимпиадам на уроке

Мы рассмотрели два основных вида подготовительной работы учителя математики к олимпиадам на уроке. Также на уроках можно применять и другие приемы.

В качестве задач для работы с наиболее сильными учащимися не надо предлагать как слишком простые, так и слишком сложные задачи. Они не оказывают существенного влияния на интеллектуальное развитие учащихся.

Контрольные работы и зачеты сегодня по-прежнему, наряду с тестами, остаются основной формой контроля уровня обученности учащихся. В числе последних заданий текстов контрольных работ (или в качестве дополнительного задания) необходимо предлагать и олимпиадные задачи.

Для подготовки к олимпиадам необходимо в домашние задания включать задачи следующего типа: придумать задачи к такому-то разделу; составить задачу, аналогичную рассмотренной в классе; решить олимпиадные задачи прошлых лет и т. п. Не будет необычным, если иногда и сильные учащиеся не справятся с домашним заданием.

В качестве домашнего задания на неделю, особенно в 5–6 классах, можно предлагать и *домашние олимпиады*. При этом учащиеся могут пользоваться имеющейся литературой, а в случае затруднений и советоваться с родителями. За решение предложенных задач учащиеся каждую неделю получают отметку, а по итогам четверти подсчитывается средний балл, который учитывается при выставлении четвертной отметки. Чтобы заинтересовать учащихся в решении олимпиадных задач в конце четверти, года лучшие поощряются призами, которыми чаще всего являются интересные и полезные книги по математике. Олимпиадные задачи есть на сайтах Центра непрерывного математического образования (http://olympiads.mccme.ru/), МГУ (http://lomonosov.msu.ru/) и МФТИ (http://www.fizteh2012.ru/variants).

В качестве примера рассмотрим по несколько вариантов домашних олимпиад.

5 класс

Вариант 1

1. Как, используя цифру 5 пять раз, знаки арифметических действий и скобки, выразить все натуральные числа от 0 до 10 включительно?

2. У щенят и цыплят вместе 44 ноги и 17 голов. Сколько щенят и сколько цыплят?

3. Если школьник купит 11 тетрадей, то у него останется 5 рублей. А на 15 тетрадей у него не хватает 7 рублей. Сколько денег у школьника?

4. Как, имея два сосуда вместимостью 5 и 7 л, налить из водопроводного крана 6 л?

5. Как разрезать прямоугольник, длина которого 16 см, а ширина 9 см, на две равные части, из которых можно составить квадрат?

Вариант 2

1. Установите закономерность в последовательности чисел и запищите еше три числа: $7, 8, 12, 21, 37, \ldots$

2. Разместите на трех грузовиках 7 полных бочек, 7 бочек, наполненных наполовину, и 7 пустых бочек так, чтобы на всех грузовиках был одинаковый по массе груз.

3. На школьной викторине участникам предложили 20 вопросов. За правильный ответ ученику давали 12 очков, а за неправильный списывали 10 очков. Сколько правильных ответов дал один из учеников, если он ответпл на все вопросы и набрал 86 очков?

4. Сколько прямоугольников изображено на рис. 9? Площадь каждого квадрата равна 1 ед^2.

5. Сколько нулей стоит в конце произведения всех натуральных чисел от 10 до 25?

Вариант 3

1. Петя провел три прямые линии и отметил на них 6 точек. Оказалось, что на каждой прямой он отметил 3 точки. Покажите, как он это сделал.

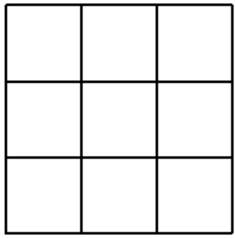


Рис. 9

2. Внучке столько месяцев, сколько лет дедушке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке и сколько лет внучке?

3. В трех мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа», на другом — «вермишель», на третьем — «крупа или сахар». В каком мешке что находится, если содержимое каждого из них не соответствует записи?

4. Три охотника варили кашу. Один положил 2 кружки крупы, второй — 1 кружку, а у третьего крупы не было. Кашу же они съели все поровну. Третий охотник и говорит: «Спасибо за кашу! И вот вам задача: я даю вам 5 патронов. Как поделить эти патроны в соответствии с вашим вкладом в мою порцию каши?»

5. Четыре девочки выбирали водящую с помощью считалки. Та, на кого падало последнее слово, выходила из круга, и счет повторялся вновь. Считающая девочка каждый круг начинала с себя и в результате стала водящей, причем счет каждый раз кончался перед ней. Какое наименьшее число слов могло быть в считалке?

6 класс

Вариант 1

1. Поставьте вместо звездочек цифры:

$$\begin{array}{r} 59{,}27 \\ +{*}{*}{,}45 \\ 78{,}{*}3 \\ \hline 182{,}1{*} \end{array}$$

2. В ведре вместимостью 6 л находится 4 л молока, а в семилитровом — 6 л. Пользуясь этими ведрами и пустой трехлитровой банкой, разделите молоко пополам.

3. Можно ли шахматную доску разрезать на прямоугольники размером 3×1?

4. Разместите восемь козлят и девять гусей в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и козлята, и гуси, а число их ног равнялось 10.

5. На столе стоят три одинаковых ящика, в одном находятся 2 черных шарика, в другом — 1 черный и 1 белый шарик, в третьем — два белых шарика. На ящиках написано: «2 белых», «2 черных», «черный и белый». При этом известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шарик, определить правильное расположение надписей?

Вариант 2

1. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Расставьте их так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника (рис. 10) была равна 20.

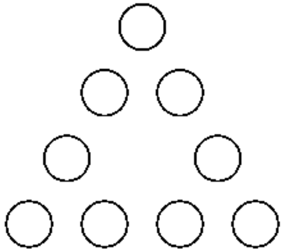


Рис. 10

2. Найдите все дроби со знаменателем 15, которые больше $\frac{8}{9}$ и меньше 1.

3. Переложите одну из семи спичек, изображающих число $\frac{7}{10}$, записанное римскими цифрами (то есть $\frac{\text{VII}}{\text{X}}$), так, чтобы получившаяся дробь равнялась $\frac{2}{3}$.

4. Возраст старика Хоттабыча записывается числом с различными цифрами. Об этом числе известно следующее:

- если первую и последнюю цифры зачеркнуть, то получится двузначное число, которое при сумме цифр, равной 13, является наибольшим;
- первая цифра больше последней в 4 раза.

Сколько лет старику Хоттабычу?

5. Инопланетяне сообщили жителям Земли, что вокруг звезды, находящейся в центре их системы, вращается три планеты А, Б, В. Они живут на второй планете. Далее передача сообщения ухудшилась из-за помех, но было принято еще два сообщения, которые, как установили ученые, оказались оба ложными:

а) А — не третья планета от звезды;

б) Б — вторая планета.

Определите порядок планет А, Б, В.

Вариант 3

1. Вместо звездочек вставьте пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}785\\ {*}{*}{*}\end{array} \\ \hline {*}{*}{*} \\ +\,1{*}{*}{*} \\ {*}{*}{*} \\ \hline {*}{*}{*}{*}{*} \end{array}$$

2. Некоторый товар стоил 500 рублей. Сначала цену на него увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена в итоге?

3. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

4. В летний лагерь приехали отдыхать три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из следующих фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша не Герасимов. Отец Володи инженер. Володя учится в 6 классе. Герасимов учится в 5 классе. Отец Иванова учитель. Какая фамилия у каждого из трех друзей?

5. Найдите площадь изображенного на рис. 11 треугольника, если площадь каждой клетки равна 1 см^2.

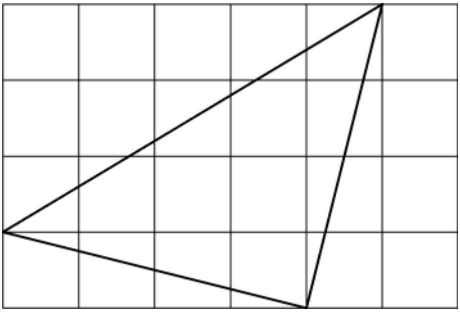


Рис. 11

В более старших классах в качестве домашнего задания можно предлагать задания по всей изучаемой теме, в числе последних из которых включать и олимпиадные задачи.

Рассмотрим примеры подобного рода задач.

1. Сравните числа $\sqrt{2014}+\sqrt{2010}$ и $2\sqrt{2013}$.

2. Сравните с единицей число

$$0{,}99999^{1{,}00001} \cdot 1{,}00001^{0{,}99999}.$$

3. Докажите, что если $a(a+b+c)<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет 2 действительных корня.

4. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(4-5x+x^2)^{2011} \cdot (4+5x+x^2)^{2010}.$$

5. Из листа бумаги вырезали произвольный треугольник. Можно ли так загнуть три его угла, чтобы оставщаяся часть треугольника оказалась накрытой без просветов и наложений?

6. На доске был нарисован параллелограмм $ABCD$ и отмечены середина E стороны AB и середина F стороны CD. Дежурный стер параллелограмм, но оставил точки A, E, F. Как по этим точкам восстановить параллелограмм?

7. Какой треугольник надо взять, чтобы после проведения в нем одного отрезка получить все известные виды треугольников: равносторонний, равнобедренный, разносторонний, прямоугольный, остроугольный, тупоугольный?

8. Найдите углы треугольника со сторонами a, b, c, если его площадь S равна $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

9. Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, а c — гипотенуза. Что больше: $a^3 + b^3$ или c^3?

10. Какие треугольники можно разрезать на два равнобедренных треугольника?

11. Парус имеет вид четырехугольника $ABCD$ (рис. 12), углы A, C и D которого равны 45°. Найдите площадь паруса, если $BD = 4$ м.

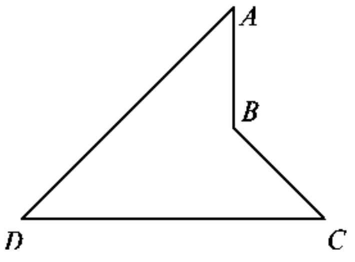


Рис. 12

Но все же работа с сильными учащимися по математике — работа штучная. Поэтому не обойтись и без индивидуального подхода как на уроке, так и вне урока. И если в классе есть несколько одаренных детей, которые проявляют себя как раз в решении олимпиадных задач, то с ними необходимо организовать специальную работу, которая будет направлена на развитие их способности. Рассмотрим некоторые особенности работы с данными учащимися.

Лучшим вариантом для таких детей был бы перевод их на индивидуальное обучение в рамках данного учебного заведения или в учебное заведение повышенного статуса (лицей, щкола с углубленным изучением математики), но не каждая школа имеет такую возможность и желание. Поэтому правильнее будет, если с такими детьми будет иначе организована вся система классной и домашней работы. В классе для таких детей необходимо предлагать другие, более трудные задачи, которые бы несли большую интеллектуальную нагрузку, но не занимали в то же время много времени. Акцент в работе с такими учащимися должен был сделан на самостоятельном обучении. Домашнее задание предлагать в такой форме, которая предполагает собственный выбор не только в отношении трудности и объема выполняемой работы, но и в отношении самого характера работы. Это могут быть как придумывание задач к разделу, который является наиболее интересным, так и решение более трудных олимпиадных задач.

Конечно, таких детей нужно охватить различными формами внеклассной и внешкольной работы, которые бы способствовали их развитию.

Итак, переходим к другим направлениям работы учителя математики с целью лучшей подготовки учащихся к математическим олимпиадам.

II. ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

Под внеклассной работой по математике понимаются необязательные систематические занятия учащихся с преподавателем во внеурочное время.

В теории и методике обучения математике различают *два типа* внеклассной работы.

К *первому типу* относится внеклассная работа с учащимися, отстающими от других в изучении программного материала (дополнительные занятия после уроков). Основной целью ее является своевременная ликвидация (и предупреждение) имеюшихся у учашихся пробелов в знаниях и умениях по курсу математики.

Вторым типом внеклассной работы является работа с учащимися, проявляющими к изучению математики повышенный по сравнению с другими интерес и способности. Последний тип и является собственно внеклассной работой в традиционном понимании этого слова.

Как раз этот тип и будет применяться как для подготовки, так и для проведения математических олимпиад.

Наиболее важными задачами внеклассной работы на современном этапе развития школы являются следующие:

- пробуждение и развитие устойчивого интереса учащихся к математике и ее приложениям;
- расширение и углубление знаний учащихся по программному материалу;
- развитие математических способностей и мышления у учащихся;
- развитие у учащихся умения самостоятельно и творчески работать с учебной и научно-популярной литературой;
- создание актива, способного оказать учителю математики помощь в организации эффективного обучения всего коллектива данного класса;
- расширение и углубление представлений учащихся о практическом значении математики в технике, экономике;
- расширение и углубление представлений учащихся о культурно-исторической ценности математики, о роли ведущих ученых-математиков в развитии мировой науки;
- осуществление индивидуализации и дифференциации;
- разностороннее развитие личности.

Внеклассная работа может осуществляться в самых разнообразных видах и формах. Условно можно выделить три основных вида внеклассной работы.

1. *Индивидуальная работа* — работа с учащимися с целью руководства внеклассным чтением по математике, подготовкой докладов, рефератов, математических сочинений, изготовлением моделей; работа с консультантами; подготовка некоторых учащихся к участию в городской (районной) или областной олимпиаде.

2. *Групповая работа* — систематическая работа, проводимая с достаточно постоянным коллективом учащихся. К ней можно отнести факультативы, кружки, спецкурсы, элективные курсы.

3. *Массовая работа* — эпизодическая работа, проводимая с большим детским коллективом. К данному виду относятся вечера, научно-практические конференции, недели математики, олимпиады, конкурсы, соревнования и т. п.

На практике все эти три вида внеклассной работы тесно связаны друг с другом.

Для подготовки к олимпиадам можно использовать следующие формы внеклассной работы по математике: факультативы, кружки, недели (декады) математики, стенную печать.

Кружки (*факультативы, спецкурсы*) являются основной формой работы с наиболее способными учащимися по математике. Только здесь можно рассмотреть олимпиадные задачи, решаемые специальными методами.

В частности, в 5–6 классах можно рассмотреть различные типы логических задач, задачи на применение некоторых инвариантов, математические ребусы, задачи на разрезание, геометрические упражнения со спичками и др., в 7–8 классах — принцип Дирихле, игры, графы, решение более сложных логических задач, а в 9–11 классах — решение уравнений в целых числах, нестандартных уравнений.

Конечно, будут и другие темы, не предназначенные для изучения специальных методов решения олимпиадных задач, а направленные на реализацию других целей работы кружка (факультатива, спецкурса).

Также некоторые занятия кружка (факультатива) можно посвятить и развитию каких-то определенных качеств ума, приемов умственной деятельности, подобрав специальные упражнения, организовав эти занятия в виде практикумов, тренингов и т. п.

На занятии кружков (факультативов и спецкурсов) нужно проводить математические соревнования и игры. Они необходимы как для текушего контроля степени усвоения рассмотренного материала, так и для психологической подготовки к будущим олимпиадам. В качестве таких соревнований и игр наиболее часто используются:

- брейн-ринг;
- математическая регата;
- устная олимпиада;
- математическая карусель;
- математическая драка;
- конкурс «Начинаюший математик»;
- математическая игра «Счастливый случай»;
- игра «Математик-бизнесмен» и др.

К сожалению, сегодня не во всех школах для учащихся 5–8 классов организованы математические кружки. Объяснить это можно различными причинами, в том числе и такими:

- мало учащихся, желающих заниматься в кружках;
- ряд регионов не проводит районных олимпиад в этих классах, поэтому учителя не видят смысла готовить учащихся к олимпиадам;
- учителя математики перегружены, им не оплачивается проведение внеклассной работы и т. п.

Вряд ли политика администрации таких школ является правпльной. Сегодня администрация школ может установить стимулирующие выплаты педагогам, занимающимися дополнительно с учащимися. Тем более что кружки можно организовать и для нескольких параллельных или смежных классов, проводить занятия по разным темам различным учителям. Но добиться успеха на олимпиадах без этой действенной формы внеклассной работы вряд ли удастся. Тем более что сегодня имеется достаточное количество литературы для проведения кружковых занятий.

В данном пособии мы подробно рассмотрим методику организации и проведения ***кружковых занятий,*** одной из целей которых и будет ***подготовка к математическим олимпиадам***.

Также подготовка к олимпиадам проводится и при проведении недель (декад) математики, все зависит от плана их проведения. Если в плане недели математики есть конкурсы по решению задач, различные соревнования, это способствует подготовке учашихся к дальнейшим олимпиадам. На математических вечерах, которые иногда завершают недели математики, проводятся разнообразные конкурсы, эстафеты, в число заданий которых часто входят и олимпиадные задачи. Часто на неделе математики проводится и сама школьная олимпиада.

Кроме олимпиад, желательно проведение в школах и других соревнований, получивших широкое распространение в некоторых школах в последние годы. Ведь только соперничество между несколькими более сильными учащимися, нежелание уступать друг другу в этих соревнованиях будут способствовать тому, что учащиеся больше будут читать дополнительной литературы, участвовать во внеклассной и внешкольной работе. Тем не менее при проведении математических соревнований необходимо соблюдать меру. Вполне будет приемлемым, если математические соревнования разных видов будут проводиться в школе 3–4 раза в течение года. Например, осенью можно провести для учащихся 5–11 классов традиционные математические олимпиады. Зимой же для учащихся разных классов разумно организовать различные математические соревнования, например турниры Архимеда (4–6 классы), регаты (7–8 классы), карусели (9 класс), бои (10–11 классы). В марте учащиеся 5–10 классов принимают участие в международной олимпиаде — конкурсе «Кенгуру». А учебный год завершают в мае еще одной олимпиадой — устной или каким-то командным соревнованием. Конечно, каждая школа может организовать и другие математические соревнования, турниры, конкурсы, игры. Но, главное, их необходимо увязать с графиком внешкольных мероприятий по математике. Кому-то может показаться, что это чересчур, устанут учащиеся от такого пристального внимания к ним. А ведь сколько проводится спортивных соревнований, конкурсов, в которых не один раз участвуют в течение года учащиеся школы, спортивных и музыкальных школ, различных студий! И ученики довольны, не устают.

Стенная печать также оказывает свое влияние на подготовку учащихся к олимпиадам, если в математических газетах есть рубрики «Уголок смекалки», «Подумай» и т. п., в которых помещаются как занимательные задачи, так и софизмы, парадоксы, арифметические ребусы, задачи с различных математических соревнований, а также и ответы к этим задачам. Также в газете может быть раздел «Познакомься с методом решения», в котором помещаются наиболее интересные задачи из журнала «Математика в школе», из других источников. И если учитель на уроке будет обращаться к предложенным и разобранным в газете задачам, тогда и от стенной печати будет толк. В связи с тем, что сегодня практически в любой школе есть Интернет, необходимо и его использовать для подготовительной работы к олимпиадам по математике.

III. ВНЕШКОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В отличие от внеклассной работы, которая проводится с учащимися одной школы учителями математики (а иногда и родителями учащихся) этой же школы, внешкольная работа организуется с учащимися нескольких школ города, района или региона. При этом внешкольные занятия с учашимися могут организовываться как на базе какой-то школы (чаше всего опорной школы для куста сельских школ), так и на базе вузов, центров дополнительного образования, домов творчества и т. п.

Внешкольная работа, прежде всего, предназначена для учащихся, уже увлеченных математикой.

Основными целями организации внешкольной работы являются:

- развитие мышления и математических способностей учащихся;
- углубление знаний учащихся по математике.

Основными формами внешкольной работы по математике на сегодня являются:

- математические кружки и факультативы при опорных школах, вузах, домах творчества, центрах дополнительного образования;
- летние математические школы;
- математические соревнования между школами, городами (различные виды олимпиад, кубок Колмогорова, Уральские турниры и т. п.);
- районные и городские научные конференции школьников.

Многие из данных форм могут использоваться и для подготовки учащихся как к олимпиадам, так и к другим соревнованиям.

Проводят внешкольную работу, как правило, преподаватели и студенты вузов, работники центров дополнительного образования, домов творчества, а также и учителя некоторых школ.

Задача учителя математики будет состоять в том, чтобы учащиеся классов, в которых он ведет математику, смогли участвовать в таких видах внешкольной деятельности, которые им нужны. Главное — владеть информацией обо всех формах внешкольной работы, в которой могут принимать участие его ученики. И здесь надо думать больше об ученике, а не о собственном престиже. Не каждый учитель может обладать такими качествами, которые позволят ему подготовить призера региональной или всероссийской олимпиады, каждый имеет свой «потолок» в интеллектуальном развитии. Иногда без привлечения других специалистов добиться продвижения ученика будет невозможно. Инициатива в данном случае должна исходить от руководителей школ и методистов отделов образования, они должны решать проблемы дополнительного математического образования учащихся своей школы, района. А в качестве таких специалистов могли бы выступить как некоторые учителя математики из близлежаших школ, так и педагоги дополнительного образования и, конечно же, преподаватели вузов. Только совместная работа учителя математики, педагога дополнительного образования и преподавателя вуза может принести успех.

Первым заметным успехом ученика является призовое место в районной, городской олимпиаде или каком-то другом соревновании районного (городского) масштаба. Очень жаль, когда никаких математических соревнований по математике для учашихся 5–8 классов в ряде регионов не проводится. А зачем? Ведь областные олимпиады проводятся часто лишь в 9–11 классах. А потом вызывает удивление тот факт, что учащиеся в 9–11 классах ничего не могут решить. А все потому, что они ни разу не участвовали в аналогичных соревнованиях, не решали подобных задач, да им уже, может, и неинтересно это. Поэтому, независимо от финансовых проблем в системе образования, необходимо изыскивать средства и проводить математические соревнования (в первую очередь традиционные олимпиады) для учащихся 5–8 классов.

Итак, рассмотрим еще одно направление работы учителя математики по подготовке к олимпиадам.

IV. ЗАОЧНАЯ РАБОТА

Одним из направлений для подготовки к олимпиадам является и заочная работа в различных школах при вузах. Одной из таких известных всероссийских школ является школа «Авангард» (Москва). Уровень предлагаемых там заданий очень высок, большинство идей в этих заданиях встречается на различного уровня олимпиадах. И выполнение такого рода заданий будет способствовать, конечно же, подготовке учащихся к олимпиадам. Во многих крупных городах имеются щколы одаренных детей, в вузах — факультеты (отделения, центры) довузовской подготовки. В них можно обучаться и заочно. Задача учителя математики будет заключаться в том, чтобы донести информацию о них до своих учеников, убедить некоторых из них в необходимости заочного обучения в данных школах, на данных факультетах. Также часто некоторые журналы, газеты объявляют различные конкурсы для любителей решать разнообразные задачи. Учителю математики необходимо найти время и уделить внимание этим конкурсам. А затем, когда кто-то из его учеников примет участие в данных конкурсах, надо не забыть сказать об этом, тем более если участник покажет хорощий результат.

Только задействовав все эти четыре направления в подготовке учашихся к олимпиадам (хотя это для жизни не главное, куда важнее интеллектуальное развитие ученика, подготовка его к современной жизни, где без острой конкуренции уже не обойтись), можно ожидать успеха.

Раздел 2
МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ НА ЗАНЯТИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Наиболее подходящей формой подготовки к математическим олимпиадам в 5–8 классах является математический кружок. Математический кружок — это самодеятельное объединение учащихся под руководством педагога, в рамках которого проводятся систематические занятия с учащимися во внеурочное время.

Наряду с подготовкой к математическим олимпиадам основными целями проведения кружковых занятий являются:

- привитие интереса к математике;
- углубление и расширение знаний учащихся по математике;
- развитие математического кругозора, мышления, исследовательских умений;
- воспитание настойчивости, инициативы.

Частично данные цели реализуются и на уроке, но окончательная и полная реализация их переносится на внеклассные занятия, в первую очередь на кружки.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ КРУЖКА

В основе кружковой работы лежит принцип добровольности. Кружки могут быть организованы как для хорошо успевающих учащихся, так и для всех желающих. Также могут быть кружки с секциями (если много желающих заниматься математикой вне уроков); кружки с уровнями: для более сильных учащихся и для остальных учащихся. В кружок могут объединяться как учащиеся одного класса, так и параллельных классов; также кружок может быть организован, например, для учащихся двух-трех классов (5–6 или 7–9). В таком случае учителю будет труднее продумать содержание занятий.

На одном из первых уроков математики в классе (в сентябре) надо рассказать учащимся о том, что для желающих будет организован кружок, чем будут заниматься учащиеся в кружке, что нового и интересного они узнают, в чем польза кружковых занятий, как они будут проходить, выявить желающих. Занятия кружка могут проводиться при любом числе желающих. Лучше, если учащихся в нем не менее 5 человек, но и не более 15.

Начинать работу кружка лучше с середины сентября или с 1 октября, а завершать в конце апреля (начале мая). В течение года кружковые занятия должны увязываться с другими формами внеклассной работы по математике, в подготовке и проведении которых активное участие должны принимать члены кружка. В каникулы занятия предметных кружков проводить не рекомендуется.

На первом занятии кружка надо выработать своеобразный устав (права и обязанности членов кружка). Также кружок может иметь свое название, эмблему, девиз (если того пожелают учащиеся).

Занятия кружка обычно проводятся 1 раз в 1–2 недели, продолжительность занятия для учащихся 5 класса 30–45 минут, для учащихся 6–8 классов — 60–90 минут.

ПЛАНИРОВАНИЕ РАБОТЫ КРУЖКА

План работы кружка лучше составлять на год, хотя начинающему учителю математики лучше план составлять на четверть или полугодие. Форма плана может быть любая. Рассмотрим возможный вариант.

Номер занятия кружка	12
Дата проведения	27.02
Содержание занятия	Решение старинных задач
Учащиеся, ответственные за подготовку	Иванов В.
Срок для подготовки	До 25.02
Примечания	

В примечаниях указывают плюсы и минусы проведенного занятия, то есть данные этой графы помогут учителю скорректировать занятие кружка в дальнейшем.

Для удобства занятия кружка целесообразно увязывать с планом всей внеклассной работы по математике (если такой план имеется в школе). Примерная форма такой увязки может быть следующая.

Месяц	Неделя	Тематика кружкового занятия (7 класс)	Другие формы внеклассной работы
Ноябрь	1	Как возникла алгебра	Математическая стенгазета
	2		
	3	Графы	Математическая олимпиада (первый тур)
	4		

Для планирования и проведения кружковых занятий учитель математики составляет программу.

Основными требованиями к программе являются:

- связь содержания программы с изучением программного материала;
- использование занимательности;
- использование исторического материала;
- решение нестандартных, олимпиадных задач;
- учет желаний учащихся;
- особенности школы, региона;
- наличие необходимой литературы у учителя.

Пишется программа по форме, принятой в данной школе. Она может быть похожа на программу факультатива. В этом случае программа состоит из таких разделов: пояснительная записка, учебно-тематический план, содержание занятий, основные знания и умения, литература. Программа может быть и проще, типа вышерассмотренного плана.

Приведем несколько возможных тем кружковых занятий для учащихся разных классов.

1. Задачи, решаемые с конца (5–6 кл.).
2. Числа-великаны и числа-малютки (5–6 кл.).
3. Запись цифр и чисел у других народов (5–6 кл.).
4. Занимательные задачи на проценты (6 кл.).
5. Математические ребусы (5–6 кл.).

6. Геометрические задачи со спичками (5–6 кл.).
7. Задачи на разрезания и перекраивания фигур (5–7 кл.).
8. Простейшие графы (6–7 кл.).
9. Упражнения на быстрый счет (5–8 кл.).
10. Занимательные задачи на построения (7–8 кл.).
11. Геометрические построения с различными чертежными инструментами (7–8 кл.).
12. Недесятичные системы счисления (5–7 кл.).
13. Взвешивания (5–7 кл.).
14. Логические задачи (5–8 кл.).
15. Теорема Пифагора (8 кл.).
16. Геометрические задачи на местности (8–9 кл.).
17. Как на практике измеряют длины и углы? (7–8 кл.).
18. Аналогии в математике (8–9 кл.).
19. Индукция в математике (8–9 кл.).
20. Принцип Дирихле (6–9 кл.).
21. Равновеликие и равносоставленные фигуры (8–9 кл.).
22. Занимательные комбинаторные задачи (7–9 кл.).
23. Комплексные числа (8–9 кл.).

При этом на некоторые темы можно выделить по несколько занятий кружка.

ПРОВЕДЕНИЕ ЗАНЯТИЙ КРУЖКА

Очень многое в организации работы кружка зависит от первого занятия. Возможна такая структура первого занятия:

1. Руководитель кружка (учитель математики) освещает перспективы, то есть что будет рассматриваться на занятиях кружка, чем учащиеся будут заниматься. Необходимо указать и основные требования, которым должны подчиняться члены кружка.

2. Решение задач по определенной теме (не самой трудной, но и не развлекательного характера). Например, для 5–7 классов в качестве таких тем подойдут:

- решение сюжетных задач с конца;
- задачи на переливания;
- задачи на разрезания и т.п.

3. Решение 1–2 занимательных задач.

4. Домашнее задание.

Решением же других вопросов (выбор старосты (командира, лидера) кружка, утверждение плана работы и др.) лучше заняться на 3-м или 4-м занятии кружка, когда уже будет ясен его состав.

При проведении занятий кружка можно использовать как разработки других авторов, так и подбирать содержание занятия из имеющейся в наличии литературы. Неполный список такой литературы приведен в конце данной книги.

На сегодня имеются следующие разработки кружковых занятий.

1. *Руденко В.Н., Бахурин Г.А., Захарова Г.А.* Занятия математического кружка в 5 классе. М.: Издательский дом «Искатель», 1999.
2. *Шейнина О.С., Соловьева Г.М.* Математика. Занятия школьного кружка. 5–6 кл. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2003. С. 208.
3. *Спивак А.В.* Математический кружок. 6–7 классы. М.: Посев, 2003. С. 128.
4. *Анфимова Т.Б.* Математика. Внеурочные занятия. 5–6 классы. М.: Илекса, 2011. С. 128.

Много интересного материала имеется в дополнительных главах к школьным учебникам, разнообразным пособиям по внеклассной работе, а также в журнале «Математика в школе».

Рассмотрим организацию занятий математического кружка по подготовке к олимпиадам. Так как основная цель проведения кружковых занятий заключается в подготовке к математическим олимпиадам, а интересы учащихся все же разнообразны, то лучше проводить кружковые занятия в различных формах.

Рассмотрим основные формы проведения кружковых занятий.

I. *Комбинированное тематическое занятие.*

Примерная структура данного занятия может быть следующей:

1. Выступление учителя (или доклад кружковца) по избранному вопросу на 5–15 минут.
2. Основная часть — самостоятельное решение задач по определенной теме членами кружка, причем в числе

их должны быть задачи и повышенной трудности. Число задач — 3–5 (зависит от темы и продолжительности занятия). После решения первой задачи всеми или большинством учащихся один из учащихся производит ее разбор для всех членов кружка. Учитель по ходу решения задач формулирует выводы, делает обобщения.

3. Решение задач занимательного характера, задач на смекалку, разбор математических софизмов, фокусов, проведение математических игр и развлечений.
4. Ответы на вопросы учащихся, домашнее задание.

При этом некоторые наиболее трудные задачи, предложенные для самостоятельного решения, иногда решает сам учитель. Выступление учителя, основная часть и домашнее задание в тематическом занятии занимают 60–80% времени.

Остальное время распределяется на решение задач занимательного характера, устных упражнений, игры, фокусы и т. п. Также в это время можно:

- заслушать небольшие сообщения (рассказ) учителя или ученика по некоторому вопросу (биографии видных математиков, интересные факты из истории математики (например, появление арифметических действий, процентов, изобретение простейших счетных машин), интересные приемы счета, сообщение о новой книге по математике для учащихся, краткое изложение некоторого математического вопроса (например, «циклоида»));
- рассмотреть решение задач, заданных на дом.

Время и место этой части занятия определяет учитель.

II. *Конкурсы по решению математических задач, олимпиады, игры.*

Такого рода занятия лучше проводить систематически, через 4–6 тематических занятий, это будет своеобразный итог работы за 1–2 месяца. Но обязательно и в конце учебного года.

При такой форме организации кружкового занятия все оно посвящается какому-то соревнованию, конкурсу.

В качестве примера укажем такие соревнования, как:

- нестандартная олимпиада (драка, хоккей и т. п.);

- математическая карусель;
- математический бой;
- устная олимпиада;
- математическая регата и т. д.

Много разработок такого рода опубликовано в газете «Математика», журнале «Математика в школе», а также в пособии: Предметные недели в школе. Математика. Волгоград: Учитель, 2002. Многие игры, конкурсы проводятся на кружковых занятиях. Хотя их можно использовать и при проведении других форм внеклассной работы. Иногда традиционные олимпиады (классная и школьная) для учащихся 5–8 классов проводятся весной (март–апрель) как итог работы кружка. Хотя в соответствии с «Положением о проведении Всероссийской олимпиады в данном учебном году» школьный этап олимпиад для учашихся 5–7 классов проводятся в январе–феврале, а для 8 класса — в ноябре (декабре) — до муниципального этапа. Если же муниципальная олимпиада по математике для учащихся 5–8 классов проводится одновременно, то и щкольная олимпиада должна проводиться в одно время: перед муниципальной олимпиадой.

III. *Разбор заданий городской (районной) олимпиады; анализ ошибок, сделанных кружковцами.* (Применяется в случае, если этого разбора не было после проведения олимпиады.)

IV. *Решение задач на разные темы (лучше непосредственно перед первым и вторым турами олимпиад, перед другим математическим соревнованием, в котором будут участвовать члены кружка).*

Также могут быть и другие формы организации кружкового занятия.

ПОДГОТОВКА КРУЖКОВОГО ЗАНЯТИЯ

Для подготовки кружкового занятия учителю необходимо провести следующую работу.

1. Изучить все вопросы, намеченные для рассмотрения на данном занятии.
2. Решить все подобранные задачи вновь.

3. Выяснить, что в предложенном материале является наиболее интересным и трудным.
4. Расположить задачи для решения по степени сложности (или трудности). При этом задач с большими выкладками на занятие не брать. Акцент сделать на задачах с интересной идеей.
5. Формулировки задач лучше отпечатать на отдельных листочках для каждого ученика. Иногда можно предложить учашимся переформулировать текст задач, придумать самим новую фабулу и т.д.
6. В случае затруднений у учашихся в решении задачи, надо предусмотреть более простую задачу (подготовительную).
7. Для реализации дифференцированного подхода применять и задачи-«двойники» (то есть задачи с одной идеей, но разного уровня трудности).
8. Применять задачи с ошибками, задачи, содержащие материалы сегодняшнего дня.
9. Использовать предварительные задачи к будушим занятиям (как на самом занятии, так и дома).
10. Иметь всегда в запасе интересный, занимательный материал.
11. В качестве домашнего задания первое время предлагать не более 2–3 задач. Если ученики будут их активно решать, число задач можно увеличить, в противном случае оставить 2–3, и причем задавать решить не всегда, а некоторые из задач предлагать по желанию.

Желательно, чтобы все кружковцы приняли участие в подготовке занятий. С этой целью учащимся можно предлагать как объяснение решения некоторых задач остальным учашимся, так и подготовку небольших выступлений, докладов по материалу, выносимому на занятия.

Для того чтобы все учашиеся класса (параллели классов, школы) знали о том, чем занимаются кружковцы, работа кружка должна освешаться в математической газете, в которую желательно поместить план работы кружка и решаемые на нем задачи. Также для достижения целей, поставленных учителем перед кружковцами, необходимо, чтобы:

- учащиеся на занятиях вели аккуратные записи;
- в журнале занятий кружка фиксировались рассматриваемый материал и успехи учащихся;
- материалы, рассматриваемые на занятиях кружка, были основой проведения различных математических соревнований;
- систематически повторялся материал, в том числе рассмотренный и в прошлые года;
- на уроках учитель при изучении программного материала всячески поощрял знания, умения и идеи, которые ученики получили на занятиях кружка.

Итоговое занятие кружка рекомендуется начать с беседы учителя о том, как поработал кружок в течение учебного года (что рассмотрели, чему научились, какие навыки приобрели, что изучили нового). Заверщить работу кружка необходимо, как уже отмечалось, олимпиадой (можно и нестандартной) по задачам, решенным в течение учебного года, или зачетом. После этого сказать о перспективах кружка в будущем году, предложить литературу для чтения летом, особенно по олимпиадной тематике.

Раздел 3
РАЗРАБОТКИ ЗАНЯТИЙ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОЛИМПИАДАМ

ЗАНЯТИЕ 1. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ-1 (ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С КОНЦА)

Организационные вопросы

Объяснить учащимся, как будет проходить работа кружка, каковы права, обязанности учащихся, как будет организована самостоятельная работа учащихся. Организация домашней работы. Подготовка докладов.

Работа по теме занятия

Учитель предлагает учащимся для самостоятельного решения задачи № 1–3. После разбора решений задач № 1 и 2 можно ввести понятие текстовой задачи, сюжетной задачи и перейти к обсуждению задачи № 3, которая может вызвать проблемы. Показать ее правильное решение и образцы записи: по действиям и с помощью таблицы.

1. Отцу и сыну вместе 65 лет. Сын родился, когда отцу было 25 лет. Какого возраста отец и сын?

(*Решение.* Так как сын родился тогда, когда отцу было 25 лет, то разница в их возрасте будет 25 лет. Тогда $65 - 25 = 40$ (лет) — будет удвоенный возраст сына, а значит, сыну будет 20 лет, а отцу 45.)

2. Котенок Мурзик может съесть пачку сухого корма за 12 дней, кот Васька — за 6 дней, а кошка Василиса — всего за 4 дня. На сколько дней им хватит всем вместе пачки сухого корма?

(*Решение.* По условию кошка Василиса съедает за 1 день $\frac{1}{4}$ пачки корма. Кот Васька за 1 день съедает $\frac{1}{6}$ пачки корма. А котенок Мурзик съест лишь $\frac{1}{12}$ пачки. Таким образом, все три кошки вместе за день съедят

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2} \text{ пачки.}$$

Поэтому одной пачки им хватит на 2 дня.)

3. Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый мальчик дает другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик дает двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет; в свою очередь и третий дает каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было у каждого мальчика вначале?

(*Решение.* Решаем задачу с конца с помошью таблицы.

Номер мальчика	1	2	3
Число яблок в конце	8	8	8
Число яблок до передачи их третьим мальчиком	$8:2=4$	$8:2=4$	$8+4+4=16$
Число яблок до передачи их вторым мальчиком	$4:2=2$	$4+2+8=14$	$16:2=8$
Число яблок первоначально	$2+4+7=13$	$14:2=7$	$8:2=4$

Таким образом, первоначально яблок у первого, второго и третьего мальчиков было соответственно 13, 7 и 4.)

Устные упражнения

Одно из необходимых умений, которое важно для правильного решения текстовых задач, — это **внимательное чтение условия задачи.** Решим несколько задач.

4. Вы — шофер автобуса. В автобусе первоначально было 23 пассажира. На первой остановке вышли 3 женщины и зашли 5 мужчин. На второй остановке зашли 4 мужчины и вышли 7 женщин. Сколько лет шоферу?

5. Какое слово из 11 букв все отличники пишут неправильно?

6. Продавая в магазине попугая, продавец пообещал, что птица будет повторять каждое услышанное им слово. Покупатель очень обрадовался, но, придя домой, обнаружил, что попугай нем как рыба. Тем не менее продавец не лгал. Как это могло быть?

7. Английский офицер, вернувшийся из Китая, заснул в церкви во время службы. Ему приснилось, что к нему приближается палач, чтобы отрубить ему голову, и в тот самый момент, когда сабля опускалась на шею несчастного, его жена, желая разбудить заснувшего, слегка дотронулась до его шеи веером. Потрясение было столь велико, что офицер тут же умер. В этой истории, рассказанной вдовой офицера, что-то не так. Что же именно?

8. Петя решил купить Маше мороженое, но для покупки ему не хватало 3 рублей, а Маше — всего лишь 1 рубля. Тогда они решили сложить свои деньги, но опять не хватило 1 рубля на покупку даже одного мороженого. Сколько стоила порция мороженого?

Самостоятельная работа

9. Я задумал число, умножил его на два, прибавил три и получил 17. Какое число я задумал?

10. Однажды черт предложил бездельнику заработать. «Как только ты перейдешь через этот мост, — сказал он, — твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 копейки». Бездельник согласился и... после третьего перехода остался без гроша. Сколько денег у него было сначала?

11. Группа туристов отправилась в поход. В первый день они прошли $\frac{1}{3}$ пути, во второй — $\frac{1}{3}$ остатка, в третий — $\frac{1}{3}$ нового остатка. В результате им осталось пройти 32 км. Какова длина всего маршрута?

Домашнее задание

12. Играя в рулетку, Виктор удвоил количество денег, потом потерял 10 рублей, затем он утроил количество своих денег и потерял 12 рублей. После этого у него осталось 60 рублей. С какой суммой он начинал игру?

13. Над озерами летели гуси. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на семи озерах. Сколько было гусей?

14. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{КОКА} \\ +\,\text{КОЛА} \\ \hline \text{ВОДА} \end{array}$$

Решения и ответы

4. Столько, сколько вам лет.

5. Слово «неправильно».

6. Или попугай глухой, или покупатель не сказал ни одного слова.

7. Если офицер умер во время сна, то как его жена узнала, что ему снилось?

8. Мороженое стоило 3 рубля, а у Пети не было ни рубля.

9. Решаем задачу с конца:

1) $17 - 3 = 14$ — число до прибавления 3;

2) $14 : 2 = 7$ — искомое число.

10. Задача решается с конца. Так как после третьего перехода у бездельника денег не осталось, то после перехода моста в третий раз у него было 24 копейки, а до третьего перехода моста — 12 копеек. Тогда после второго перехода моста у бездельника было $12 + 24 = 36$ (копеек), а до второго перехода моста — $36 : 2 = 18$ (копеек). Рассуждая аналогично, получим, что после первого перехода моста у бездельника стало $18 + 24 = 42$ (копейки), а перед первым переходом моста — $42 : 2 = 21$ (копейка). Таким образом, у бездельника сначала была 21 копейка.

11. Решаем задачу с конца. Так как осталось 32 км, а в третий день туристы прошли остаток, то 32 км будут составлять $\frac{2}{3}$ последнего остатка, тогда сам последний остаток будет равен $32 : \frac{2}{3} = 48$ (км). Эти 48 км будут составлять $\frac{2}{3}$ длины маршрута, который осталось пройти после первого дня. Тогда весь маршрут, который осталось пройти, будет равен $48 : \frac{2}{3} = 72$ (км). Эти 72 км составляют вновь $\frac{2}{3}$, но уже всего маршрута туристов, а значит, длина всего маршрута будет равна $72 : \frac{2}{3} = 108$ (км).

12. Задача решается с помощью уравнения или с конца.

(*Ответ:* Виктор имел к началу игры 17 рублей.)

13. Так как на последнем озере сели оставшиеся гуси и больше не осталось, то там сел 1 гусь. Если бы сели 2, то 1 гусь еше остался бы (можно решить уравнением). Тогда к шестому озеру подлетали $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 3$ (гуся). А к пятому — $\left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 7$, к четвертому — $\left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 15$, к третьему — $\left(15 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 31$, ко второму — $\left(31 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 63$, тогда к первому подлетели $\left(63 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 127$ (гусей).

14. $3930 + 3980 = 7910$ (начать с $А = 0$, $К < 5$, так как $О + О = О$ и $О \neq А$, то $О = 9$. Рассматривая $К = 1, 2, 3, 4$, получим искомое решение).

Методический комментарий. В домашней работе может вызвать большие трудности решение задачи № 13. Поэтому для ее разбора на следующем занятии обязательно сделать чертеж. Особое внимание обратить на то, почему на последнем озере сел 1 гусь. Что было бы, если бы сели 2 гуся? Разобрать подробно, сколько подлетело к шестому озеру, сколько село, сколько осталось. А после этого уже заметить закономерность и объяснить решение всей задачи. Показать и другой вариант решения (с помощью уравнения).

ЗАНЯТИЕ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

Работа по теме занятия

Математическими ребусами называют задания на восстановление записей вычислений. Условие математического ребуса содержит либо целиком зашифрованную запись (цифры заменены буквами), либо только часть записи (стертые цифры заменены точками или звездочками).

Записи восстанавливаются на основании логических рассуждений. При этом нельзя ограничиваться отысканием только одного решения. Испытание нужно доводить до конца, чтобы убедиться, что нет других решений, или найти все решения. Есть математические ребусы, имеюшие несколько решений.

После вводного слова учитель предлагает учащимся подумать над решением задач № 1–2. Затем вместе с ними обсуждает решения данных задач, обратив внимание на основные приемы решения математических ребусов.

1. Восстановите поврежденные записи арифметических действий:

а) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} ** \\ * \end{array} \\ \hline **8 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} ** \\ ** \end{array} \\ \hline *98 \end{array}$

Рассматривая данную разновидность ребусов, обратить внимание на то, что сумма двузначного и однозначного чисел является трехзначным числом, поэтому первая цифра в сумме будет 1. А число $1*8$ может получиться только в сумме наибольшего двузначного числа и наибольшего однозначного. Аналогично во втором случае сумма равна 198. А так как слагаемые двузначные числа и самое большое двузначное число будет 99, то решением будет $99 + 99 = 198$.

2. Решите ребусы:

а) $\begin{array}{r} \text{ДРАМА} \\ +\ \text{ДРАМА} \\ \hline \text{ТЕАТР} \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \text{КОШКА} \\ +\text{КОШКА} \\ \text{КОШКА} \\ \hline \text{СОБАКА} \end{array}$ в) ЧАЙ:АЙ=5

(*Решение.* а) Очевидно, Д < 4. В разряде тысяч имеем А + А = А, значит, А = 0 (без перехода) или А = 9 (с переходом). Значение А = 0 не подходит, так как в разряде единиц А+А = Р (получаем А = Р = 0). Значит, А = 9, Р = 8, Е = 7. Тогда 2М + 1 = 10 + Т, Т < 9, значит, М = 5 или 6 (так как получается переход), а значения 7 и 8 уже заняты буквами Е и Р. При М = 6 получается решение:

$$18969 + 18969 = 37938.$$

б) Так как КА + КА + КА оканчивается на КА, то КА = 50, а значит, К = 5, А = 0. Так как Ш + Ш + Ш + 1 оканчивается на 0, то Ш = 3. Так как сумма трех чисел, начинающихся на 5, может начинаться лишь с 1, то С = 1. Рассматривая варианты для О, получаем, что О = 6 или О = 7, а значит, Б = 9 или Б = 2. Итак, получаем два варианта решения:

$$\begin{array}{r} 56350 \\ +56350 \\ 56350 \\ \hline 169050 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 57350 \\ +57350 \\ 57350 \\ \hline 172050 \end{array}$$

в) Этот пример является наиболее трудным. Для его решения лучше перейти от деления к умножению: 5 · АЙ = ЧАЙ, значит, Ч · 100 + АЙ = АЙ · 5, и тогда Ч·25 = АЙ. Так как АЙ — двузначное, то Ч = 1, 2, 3. Для каждого Ч находим решение: 125, 250, 375. Итак, получаем три решения: 125 : 25 = 5; 250 : 50 = 5; 375 : 75 = 5.)

Устные упражнения

3. *Дайте добрый совет!* Президент страны решил уволить своего премьер-министра, но не хотел его обижать, да и особого повода не было. Наконец он придумал вот что. Когда премьер-министр пришел к президенту, тот сказал ему: «Я положил в портфель 2 листа бумаги.

На одном написано „Останьтесь“, на другом — „Уходите“. Листок, который вы не глядя вынете из портфеля, решит вашу судьбу». Хитрый премьер-министр догадался, что на обоих листах написано «Уходите». Как ему избежать отставки?

4. Два разбойника делят добычу. Каждый уверен, что мог бы поделить добычу на 2 равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы оба остались довольны?

5. Можно ли в тетрадном листе прорезать дырку так, чтобы сквозь нее мог пролезть любой из вас?

6. Путешественник попал в плен к кровожадным дикарям. По законам племени всякого иностранца спрашивают о цели приезда. Если он при этом скажет правду — его съедят, а если солжет — утопят в море. Как путешественнику остаться в живых?

Самостоятельная работа

Решите ребусы:

7.
$$\begin{array}{r} 6* \\ \times\ *** \\ \hline ** \\ +\ ** \\ ** \\ \hline ***6 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} А \\ +\ ББ \\ А \\ \hline ССС \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} СПОРТ \\ +\ СПОРТ \\ \hline КРОСС \end{array}$$

Домашнее задание

10. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 2* \\ *2 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} *8 \\ 7* \end{array} \\ \hline 7*8 \end{array}$$

11. Решите ребус, если известно, что наибольшая цифра в числе СИЛЕН равна 5:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \text{РЕШИ} \\ \text{ЕСЛИ} \end{array} \\ \hline \text{СИЛЕН} \end{array}$$

12. Составьте свой ребус.

Решения и ответы

3. Он может достать одну из бумажек и уничтожить ее. Затем достать вторую и сказать: «Раз на этой бумажке написано „Уходите“, то на первой было „Останьтесь“».

4. Пусть один из разбойников разделит добычу на 2, по *его* мнению, равные части, а второй выберет ту, которая, по *его* мнению, больше.

5. Да. Листок сгибают пополам и проводят разрезы, как показано на рис. 13.

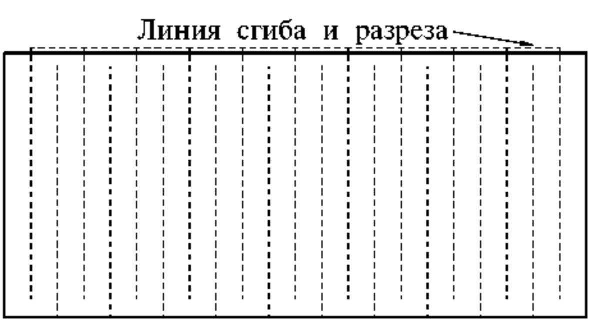


Рис. 13

Проведенные отрезки означают разрезы.

6. Путешественник может сказать: «Я приехал, чтобы вы меня утопили». Значит, если его захотят утопить, то, выходит, он сказал правду, а за правду съедают. Но если его захотят съесть, то получается, что он солгал, а за ложь топят. Остается вопрос: будут ли последовательны дикари своей логике?

7. $66 \cdot 111 = 7326$.

8. $\begin{array}{r} 6 \\ +99 \\ 6 \\ \hline 111 \end{array}$ А = 6; Б = 9; С = 1.

9. $\begin{array}{r} 43972 \\ +43972 \\ \hline 87944 \end{array}$ С = 4; П = 3; Т = 2; Р = 7; К = 8; О = 9.

10. $24 \cdot 32 = 768$.

11. Так как наибольшая цифра в числе СИЛЕН равна 5, а С = 1, то остальные 4 цифры в данном числе будут 2, 3, 4, 5. Так как Н < 6, то И = 2. А значит, Н = 4. Так как Л > Е (в самом деле, так как Е + 1 = Л, то Л > Е, ведь Л и Е меньше 5 по условию), то Л = 5, Е = 3. А тогда уже легко находим остальные цифры: Ш = 8, Р = 9. В итоге получается:

$$\begin{array}{r} 9382 \\ +3152 \\ \hline 12534 \end{array}$$

Методический комментарий. Для проверки правильности решения задачи № 5 приготовить несколько моделей с разрезами, в том числе и ошибочными (в виде спирали, без разреза на месте сгиба и т. п.). При проверке домашнего решения (№ 11) обратить внимание на то, почему все же наибольшая цифра в числе СИЛЕН равна 5. Обсудить вопрос: а что будет, если такое ограничение не делать?

ЗАНЯТИЕ 3. ИНВАРИАНТЫ

Работа по теме занятия

Ввести понятие инварианта: *инвариантом* некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления. Хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки, раскраски и т. п. Причем применение четности — одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Вспомнить определения четного и нечетного чисел. Особое внимание надо уделить абстрактному понятию четности, объяснить, что означает термин «разная четность». Рассмотреть простые примеры. Например, число $x+2$ имеет ту же четность, что и число x (или оба четные, или оба нечетные), а при прибавлении единицы четность числа меняется. Далее можно сформулировать два важных более общих утверждения, на которых основано применение идеи четности и нечетности.

Лемма 1. Четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.

Примеры:

1. Число $1+2+\ldots+10$ нечетное, так как в сумме 5 нечетных слагаемых.

2. Число $3+5+7+9+11+13$ четное, так как в сумме 6 нечетных слагаемых.

Лемма 2. Знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

Примеры:

1. Число $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$ положительно, так как в произведении четное число отрицательных сомножителей.

2. Число $(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)$ отрицательно, так как в произведении нечетное число отрицательных сомножителей.

После этого можно подробно разобрать с учащимися решение следующих задач.

1. Учитель написал на листке бумаги число 10. 15 учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

Прежде чем разобрать решение данной задачи, предложить учащимся выполнить данную операцию (при этом в зависимости от числа учащихся можно изменить числа 15 и 10). Заметить закономерность: после каждого хода характер четности меняется: после первого ученика число становится нечетным, после второго — четным, после третьего — нечетным. Тогда после пятнадцатого число будет нечетным. Поэтому ноль в конце получиться не может.

2. На доске записаны 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа, и если они одинаковые, то допишите к оставшимся числам нуль, а если разные — то единицу. Какое число останется на доске?

(*Решение.* Сумма 15 исходных чисел равна 7. А 7 — число нечетное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечетная. Если вычеркнем 2 единицы, то на доске останется после дописывания нуля 9 нулей и 5 единиц. Сумма данных 14 чисел будет нечетной. Наконец, вычеркивая нуль и единицу и приписывая единицу, мы получим на доске 7 нулей и 7 единиц, сумма которых снова является нечетным числом. Таким образом, мы замечаем, что после выполнения данной операции на доске получается на 1 число меньше, причем сумма оставшихся чисел все время остается нечетной. Далее продолжаем эту операцию, то есть переходим от 14 чисел к 13 и т. д. Так как 1 — нечетное число, а 0 — четное, то на доске после выполнения 14 раз указанной операции получается нечетное число, то есть 1.)

Вывод. Инвариантом в задачах № 1 и 2 являлась четность суммы чисел (она нечетная).

3. Все костяшки домино выложены в цепь (по правилам домино). На одном конце цепи оказалось 3 очка. Сколько очков на другом конце?

(*Решение.* Всего имеется семь костяшек с тройкой на конце: 0–3, 1–3, 2–3, 3–3, 4–3, 5–3, 6–3. Костяшка 3–3 имеет тройку на обоих концах. Всего получается восемь троек. Так как при игре в домино в цепи они должны располагаться парами, то на другом конце цепи будет 3 очка.)

Вывод. При решении аналогичных задач полезно иногда объекты разбивать на пары. Инвариантом здесь является четность количества троек на всех костяшках.

4. Квадрат размером 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

(*Решение.* Так как произведение чисел в каждой строке квадрата отрицательно, то и произведение всех чисел в этом квадрате будет отрицательно. Но, с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чисел в столбцах. А так как произведение всех чисел отрицательно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.)

Вывод. Инвариант — знак произведения чисел (он отрицательный).

Устные упражнения

5. Какие часы чаще показывают точное время: те, которые отстают на 1 минуту в день, или те, которые стоят?

6. На дереве сидели 20 ворон. Охотник выстрелил и убил двух ворон. Сколько ворон осталось на дереве?

7. Математик, оказавшись в небольшом городке, решил подстричься. В городке было лишь две парикмахерские. Заглянув к одному мастеру, он увидел, что в салоне грязно, сам мастер одет неряшливо, плохо выбрит и небрежно подстрижен. В салоне второго мастера все было чисто, а сам владелец был безукоризненно одет, чисто выбрит и аккуратно подстрижен. Тем не менее математик отправился стричься к первому парикмахеру. Почему?

Самостоятельная работа

8. Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?

9. Конь вышел с поля $a1$ шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

10. 2012 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?

11. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

Домашнее задание

12. На столе стоят 6 стаканов. Из них 5 стоят правильно, а один перевернут вверх дном. Разрешается переворачивать одновременно 4 любых стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно?

13. Мише учитель математики поставил в дневник отметку «2». Миша, желая скрыть от мамы данный факт, порвал свой дневник на 4 части. Этого ему показалось мало, поэтому некоторые из этих частей (может быть, и не все) он порвал на 4 части и т.д. Мама нашла 20 кусочков дневника. Все ли куски нашла мама?

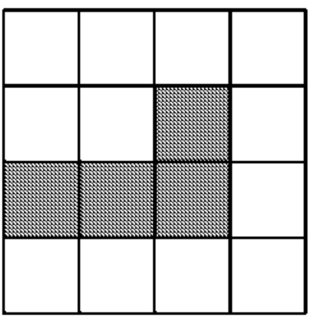


Рис. 14

14. Разрежьте квадрат на 4 части одинаковой формы и размера так, чтобы в каждую часть попало ровно по одному заштрихованному квадрату (рис. 14).

Решения и ответы

5. Вторые, так как первые показывают верное время 1 раз в 2 года, а вторые — 2 раза в день.

6. Ни одной. В принципе могло остаться на дереве и 1, и 2 вороны, если при падении на землю они застряли в ветвях дерева. Остальные вороны улетели.

7. Так как в городе всего две парикмахерские, а второй мастер хорошо выбрит и аккуратно подстрижен, то подстриг его первый мастер.

8. Нет, так как сумма 15 нечетных чисел — число нечетное, а 50 — число четное.

9. При каждом своем ходе конь меняет цвет поля, поэтому при возвращении обратно он должен сделать четное число ходов.

10. Не всегда. При перестановке сохраняется четность номера места. Поэтому если самый высокий человек, например, стоит вторым, то он никогда не станет первым. Здесь число 2012 роли не играет.

11. Так как число арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то четность числа арбузов в этих корзинах будет разной. Тогда четность числа арбузов в корзинах будет чередоваться, поэтому в половине корзин будет четное число арбузов, а в половине — нечетное. Тогда общее число арбузов в 8 корзинах с четным числом арбузов и в 8 корзинах с нечетным числом арбузов будет четным. По условию же всего арбузов 55, нечетное число. Значит, разложить нельзя.

12. Нет, так как в любом случае число перевернутых вверх дном стаканов будет числом нечетным.

13. Так как число кусков могло быть 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22, то мама нашла не все куски.

14. Два решения приведены на рис. 15, 16.

Методический комментарий. В связи с тем, что учащиеся сегодня учатся в начальной школе и в 5–6 классах по различным программам и различным учебникам, учителю, возможно, придется ввести понятие отрицательного числа или не решать задачу № 4. При разборе домашней задачи № 13 сделать вывод, что данную задачу можно было решить иначе, заметив, что число кусков, которые могли получиться, записывают в виде $3p+1$, а число $20 = 6 \cdot 3 + 2$. Получаются разные

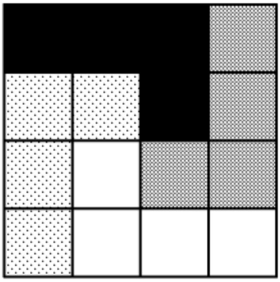


Рис. 15

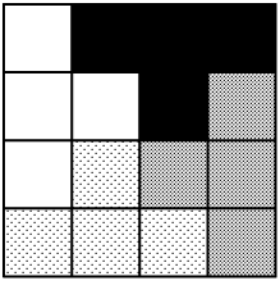


Рис. 16

остатки от деления на 3. Остаток от деления также может быть инвариантом, но задачи на применение данного и других инвариантов будут рассмотрены позже. Также желательно для разбора решения задачи № 8 иметь шахматную доску или ее изображение.

ЗАНЯТИЕ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ-1 (РАЗРЕЗАНИЯ)

Работа по теме занятия

1. Разрежьте фигуры, изображенные на рис. 17 и 18, на **4** равные части. (Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.)

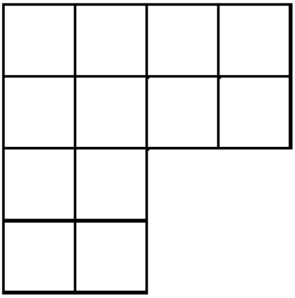


Рис. 17

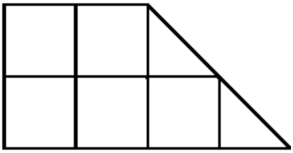


Рис. 18

2. Разрежьте квадрат на две равные фигуры по ломаной линии, состоящей из трех равных отрезков. Начало разреза в точке *A* (рис. 19).

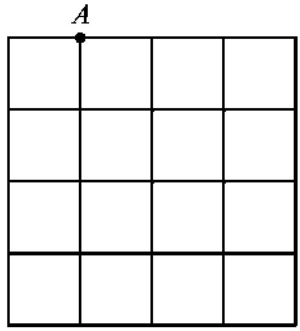


Рис. 19

3. Квадрат размером 5×5 разрежьте прямыми линиями так, чтобы из полученных частей можно было составить 50 равных квадратов. Не разрешается оставлять неиспользованные части, а также накладывать их друг на друга.

Повторение

4. Женщина собирала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через 4 ворот, каждые из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой женщина принесла всего 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?

5. В наборе было 23 гири массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 23 кг. Гирю массой 21 кг потеряли. Можно ли разложить оставшиеся гири на две равные по массе кучки?

6. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \mathrm{B} \\ \mathrm{AAAA} \\ +\mathrm{AAAA} \\ \mathrm{AAAA} \\ \hline \mathrm{BAAAA} \end{array}$$

Самостоятельная работа

7. Разрежьте треугольник на два треугольника, четырехугольник и пятиугольник, проведя две прямые линии.

8. Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников, так чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали.

9. Разрежьте прямоугольник размером 3×4 на 2 равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно лишь по стороне квадрата размером 1×1, и способы считаются разными, если полученные фигуры не будут равными при каждом способе.

10. Квадрат можно легко разрезать на 2 равных треугольника или 2 равных четырехугольника. А можно ли разрезать квадрат на 2 равных пятиугольника или 2 равных шестиугольника?

Методический комментарий. В качестве домашнего задания предложите дорешать оставшиеся № 7–10.

Решения и ответы

1. См. рис. 20 и 21.

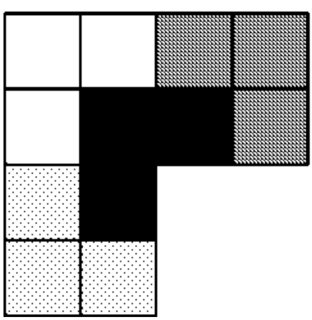


Рис. 20

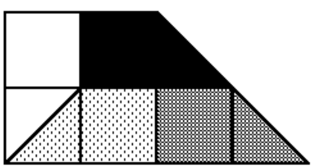


Рис. 21

2. Вариант разрезания показан на рис. 22.

3. Сначала квадрат размером 5×5 разрежем на 25 квадратов размером 1×1, затем каждый из полученных квадратов разрежем по диагонали на 4 треугольника, из которых, прикладывая большие стороны двух треугольников друг к другу, можно получить 2 квадрата (рис. 23).

4. Решаем с конца: четвертому отдано 10 яблок, третьему — 20, второму — 40, первому — 80. Значит, всего 150 яблок. (Изначально женщина собрала 160 яблок.)

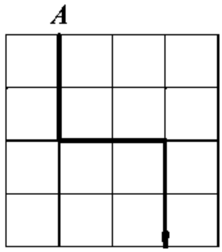


Рис. 22

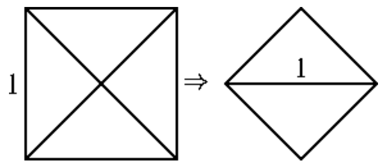


Рис. 23

5. Оставшаяся масса гирь нечетная, поэтому нельзя разделить.

6. Данный ребус можно записать и так:

$$B + 3 \cdot AAAA = B \cdot 1000 + AAAA.$$

Так как $AAAA = A \cdot 1111$, то получим:

$$B + 3 \cdot A \cdot 1111 = B \cdot 10000 + A \cdot 1111,$$

откуда $2 \cdot A \cdot 1111 = 9999 \cdot B$ или $2 \cdot A = 9 \cdot B$. Отсюда, учитывая, что A и B — цифры, получаем: $A = 9$, $B = 2$.

7. См. рис. 24.

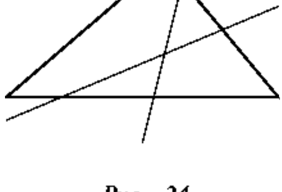


Рис. 24

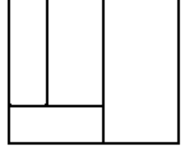


Рис. 25

8. См. рис. 25.

9. 5 способов, они изображены на рис. 26.

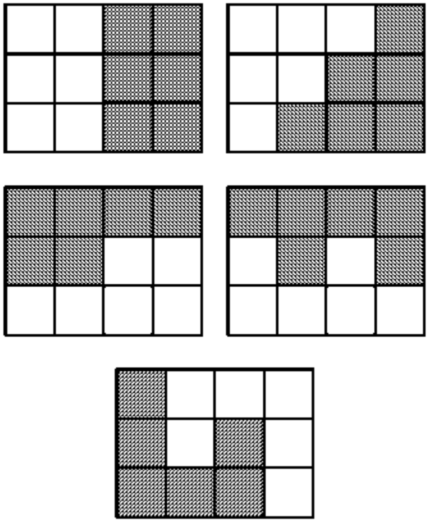


Рис. 26

10. Да, возможные варианты показаны на рис. 27.

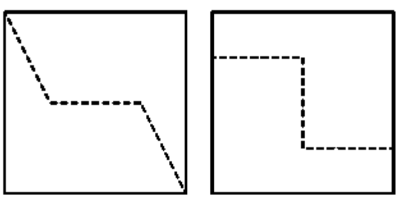


Рис. 27

ЗАНЯТИЕ 5. ПОВТОРЕНИЕ

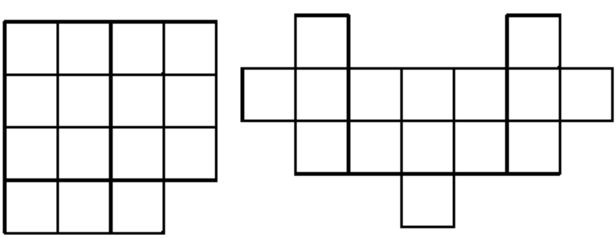
Повторение методов решения задач, рассмотренных ранее

1. Крестьянин пришел к царю и попросил: «Царь, позволь мне взять одно яблоко из твоего сада». Царь ему разрешил. Пошел крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором. Каждый забор имеет только одни ворота, и около каждых ворот стоит страж. Подошел крестьянин к первому стражу и сказал: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». «Возьми, но при выходе должен будешь отдать мне половину яблок, что возьмешь, и еще одно», — поставил условие страж. Это же повторили ему второй и третий, которые охраняли другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, после того как он отдаст положенные части трем стражам, а у него останется одно яблоко?

2. Восстановите цифры в записи следуюшего деления:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,14** & *7 \\ \cline{2-2}
\underline{**5} & ** \\
-\;** & \\
\underline{*1} & \\
0 &
\end{array}
$$

3. Разрежьте каждую из фигур на три равные части (рис. 28). Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равными и по илощади, и по форме.



а б

Рис. 28

4. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с нее 2 плода. Если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастет еше 1 ананас. А если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 банан. В итоге на яблоне остался один плод. Что это за илод, если вначале на яблоне было 12 бананов и 13 ананасов?

5. У мальчика было 10 монет достоинством 1 рубль и 5 рублей. Он насчитал 35 рублей. Не ошибся ли мальчик?

6. Решите ребусы:

$$\begin{array}{r} \text{ТУЗИК}\\ +\,\text{ТУЗИК}\\ \hline \text{КАРТУЗ}\end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{РЕБУС}\\ \times\qquad \text{Р}\\ \hline \text{СССССС}\end{array}$$

7. Однажды Незнайка со своими друзьями собирал яблоки. Нарвали они не очень много — меньше шестидесяти, но и немало — больше пятидесяти. Разделили все яблоки поровну. Вдруг видят — Чебурашка к ним бежит. Не беда, что из другой сказки. Надо и его яблочком угостить. Каждый коротышка отдал Чебурашке одно яблоко, и оказалось, что у всех опять яблок поровну. Сколько было всего коротышек? Сколько яблок они собрали? По скольку яблок досталось каждому?

Игра: Цепочки слов

Данная игра основана на словах-метаграммах. Метаграмма получается заменой одной из букв слова на другую. Игра заключается в нахождении цепочки метаграмм, соединяюших два заданных слова. Например, КОЗА может превратиться в таких животных:
КОЗА — ПОЗА — ПОЛА — ПОЛК — ВОЛК,
КОЗА — ЛОЗА — ЛУЗА — ЛУПА — ЛИПА — ЛИСА,
КОЗА — КОРА — КАРА — ФАРА — ФАРС — БАРС.

Один из авторов данной игры — Л. Кэрролл, автор сказки «Алиса в Стране чудес».

8. Придумайте цепочку метаграмм, переводяших слова МИГ в ЧАС; ЧАС — в ГОД; ГОД — в ВЕК; ВЕК — в ЭРА.

Домашнее задание

9. Придумать цепочку метаграмм, переводяших слово МУХА в слово СЛОН.

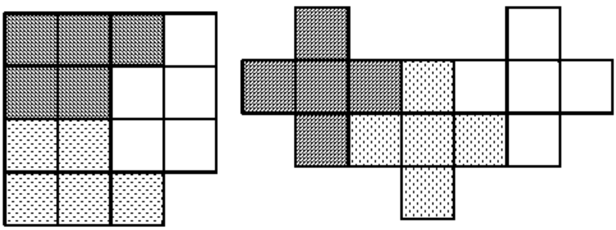
10. Придумать свою цепочку метаграмм.

Решения и ответы

1. Решаем задачу с конца. Перед последними воротами у крестьянина должно остаться $(1+1)\cdot 2 = 4$ (яблока), перед вторыми — $(4+1)\cdot 2 = 10$ и перед первыми — $(10+1)\cdot 2 = 22$ (яблока).

2. $1431 : 27 = 53$.

3. См. рис. 29.



а б

Рис. 29

4. Так как четность числа бананов не меняется, то оставшийся плод — ананас.

5. Числа 1 и 5 нечетные. Всего их 10. Сумма 10 нечетных чисел будет четной, а 35 — число нечетное. Значит, мальчик ошибся.

6. $54\,271 + 54\,271 = 108\,542$; $79\,365 \cdot 7 = 555\,555$.

7. Обшее число яблок должно делиться на два соседних натуральных числа (на число всех коротышек и на это число, увеличенное на единицу). Среди чисел больших 50, но меньших 60 этому условию удовлетворяет только число 56.

8. МИГ — МАГ — МАЙ — ЧАЙ — ЧАС — ЧАД — ГАД — ГОД — ГИД — ВИД — ВИС — ВЕС — ВЕК — БЕК — БОК — БОА — БРА — ЭРА.

9. Возможный вариант: МУХА — МУРА — МАРА — ПАРА — ПАРК — ПАУК — ПАУТ* — ПЛУТ — ПЛОТ — ПЛАТ — ПЛАН — КЛАН — КЛОН — СЛОН.

10. Вариант, предложенный учашимся: ВОР — МОР — МИР — ПИР — ПАР — БАР — БАК — РАК — РОК — РОД — РОВ.

*Паут — одно из названий овода.

Методический комментарий. Чтобы уравнять шансы учащихся на следующем занятии (где проводится математическое соревнование), проводится данное занятие. На нем повторяется решение всех типов задач, рассмотренных до этого. Разбор задач, вызвавших затруднения у большинства учащихся, производится на доске после решения их большинством учащихся. Те задания, которые у учащихся вызвали меньше проблем, остаются для домашней работы.

ЗАНЯТИЕ 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОРЕВНОВАНИЕ (МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДРАКА)

Виды математических соревнований. Правила математической драки

Основными видами математических соревнований являются олимпиады (стандартные и нестандартные, личные и командные), бои, карусели, викторины, конкурсы и т. п.

Математическая драка является разновидностью личной олимпиады, относится к нестандартным олимпиадам. Для ее проведения учитель подбирает 8–12 задач разной трудности, в их число включают как задачи на методы решений, изучаемые на занятиях кружка, так и задачи, методы решений которых не рассматривались. Очень трудные задачи, на решение которых надо потратить много времени, не включают. Условия задач раздают каждому участнику олимпиады, при этом рядом с условием задачи указывается и ее цена в баллах. Ученики приступают к решению той из задач, которая им под силу. Первый решивший какую-то из задач поднимает руку, называет номер задачи и выходит к доске ее объяснять. В случае верного решения он получает то число баллов, которое указано рядом с решенной им задачей. В противном случае ученик получает то же число баллов, но со знаком «минус», а цена задачи увеличивается. Таким образом, ученик «ввязывается» в драку с задачей, если считает, что он сможет ее победить. На сколько баллов увеличить цену задачи или во сколько раз — решает учитель. Олимпиада завершается по истечении 45–60 минут.

Математическая драка

1. У овец и кур вместе 36 голов и 100 ног. Сколько овец? **(3 б)**

2. Алеша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алеша? **(3 б)**

3. Перед вами стоят 6 стаканов: три с водой и три пустых (рис. 30). Дотроньтесь рукой лишь до одного стакана и добейтесь, чтобы пустые и полные стаканы чередовались. **(2 б)**

Рис. 30

4. Решите «животноводческий» ребус **(3 б)**

$$
\begin{array}{r}
\text{Б} \\
+\,\underline{\text{БЕЕЕ}} \\
\text{МУУУ}
\end{array}
$$

5. Алеша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один ездит домой из школы на автобусе, другой — на трамвае, третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алеша пошел проводить друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из автобуса: «Боря, ты забыл в школе тетрадь!» Кто на чем ездит домой? **(4 б)**

6. Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре будет вместе 100 лет? **(6 б)**

7. В вершинах куба записаны числа 2, 0, 0, 3, 1, 9, 5, 7. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах одного ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах? **(4 б)**

8. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня — 50 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Сколько весит Аня? **(6 б)**

9. На рис. 31 изображены 13 точек. Сколько квадратов с вершинами в этих точках можно нарисовать? (Все точки располагаются в вершинах квадратиков со стороной 1). **(6 б)**

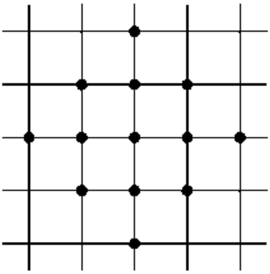


Рис. 31

10. Разрежьте фигуру (рис. 32) на 2 равные части. **(5 б)**

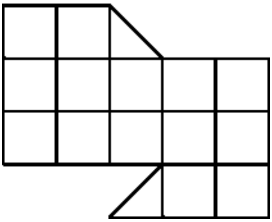


Рис. 32

11. Из бочки, содержащей не менее 10 л бензина, отлейте ровно 6 л, используя бидон вместимостью 5 л и девятилитровое ведро. **(5 б)**

Методический комментарий. Победителем математической драки является ученик, набравший больше всех баллов, ему учитель вручает приз (например, книгу по математике). Задачи, вызвавшие наибольшее затруднение у учащихся, разбирают в конце занятия. Можно оставить для решения дома 1–2 наиболее интересных.

Решения и ответы

1. Если бы у всех было по 2 головы, то было бы 72 ноги. Остается 28 ног. Так как у овец по 4 ноги, то овец будет 14. Тогда кур останется 22.

2. Решаем с конца: $(2 \cdot 7 + 6) : 4 \cdot 3 - 5 = 10$.

3. Перелить воду из второго стакана в пятый.

4. $1 + 1999 = 2000$.

5. Так как Алеша не ездит на троллейбусе и провожает друга до автобусной остановки, то он ездит на трамвае. Так как третий друг кричал Боре из троллейбуса, то Боря ездит на автобусе, а третий друг — Витя — на троллейбусе.

6. По условию задачи составим таблицу:

	Игнат	Сестра
Тогда	$2x$	x
Сейчас	$4x$	$3x$
Через 15 лет	$4x + 15$	$3x + 15$

и уравнение: $7x + 30 = 100$, откуда $x = 10$. Игнату 40 лет сейчас.

7. Сумма всех чисел первоначально была равна 27 — это число нечетное. При прибавлении двух одинаковых чисел четность суммы не изменится. А так как сумма шести нулей равна нулю — число четное, то получить нули во всех вершинах куба нельзя.

8. Найдем удвоенную сумму масс всех ребят. Она будет равна 340 кг. Значит, масса всех ребят будет 170 кг. Так как масса Тани, Мани, Вани и Дани будет 150 кг, то Аня будет весить 20 кг.

9. Можно нарисовать 4 квадрата со стороной 1 клетка; 5 — со стороной, равной диагонали клетки; 1 — со стороной 2 клетки, 1 — со стороной 2 диагонали клетки. Всего получаются 11 квадратов (рис. 33).

10. См. рис. 34.

11.

5 л	0	5	0	5	1	1	0	5	0
9 л	0	0	5	5	9	0	1	1	6

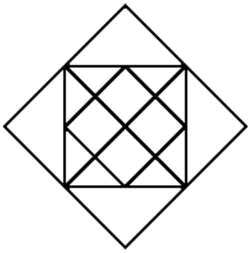


Рис. 33

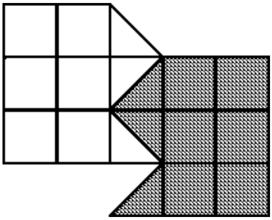


Рис. 34

ЗАНЯТИЕ 7. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Работа по теме занятия

Вступительное слово учителя. При решении различных математических задач применяется специальный метод, получивший название: «принцип Дирихле». Существует несколько формулировок данного принципа. Самая популярная следующая: «Если в n клетках сидит m зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца». Доказывается данный принцип Дирихле легко, методом доказательства от противного, который учащиеся 7 класса изучали на уроках. Поэтому некоторые из задач, рещаемых с помощью принципа Дирихле, также можно рещить, используя метод доказательства от противного, но не все.

На первый взгляд непонятно, почему это совершенно очевидное предложение тем не менее является мошным математическим методом решения задач, причем самых разнообразных. Все дело, оказывается, в том, что в каждой конкретной задаче нелегко понять, что же здесь выступает в роли зайцев, а что — в роли клеток. И почему надо, чтобы зайцев было больще, чем клеток. Выбор зайцев и клеток часто неочевиден. Далеко не всегда по формулировке задачи можно определить, что следует применить принцип Дирихле. Главное же достоинство данного метода решения состоит в том, что он дает неконструктивное решение (то есть мы знаем, что такие клетки есть, но где именно они находятся, часто указать не можем); попытка же дать конструктивное доказательство приводит к большим трудностям. Рассмотрим примеры различных задач, решаемых с помошью принципа Дирихле.

1. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся, как минимум, 2 ученика, отмечающих дни рождения в одном месяце.

(*Решение.* Пусть 15 учеников будут «зайцы». Тогда «клетками» будут месяцы года, их 12. Так как $15 > 12$, то по принципу Дирихле найдется, как минимум, одна клетка, в которой будут сидеть по крайней мере 2 «зайца». То есть найдется месяц, в котором будут отмечать дни рождения не менее 2 учеников класса. А это и требовалось доказать. Также задача легко решается с использованием метода доказательства от противного.)

2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположены 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.

(*Решение.* Это наиболее трудная задача на принцип Дирихле. Но на примере ее решения очень хорошо видны все достоинства принципа. Итак, при решении сначала надо выбрать что-то за «зайцев». Так как в условии задачи фигурирует число 5, то пусть 5 точек будут «зайцами». Так как «клеток» должно быть меньше, и чаше всего на 1, то их должно быть 4. Как получить эти 4 «клетки»? Так как в условии задачи есть еше 2 числа: 1 и 0,5; причем второе меньше первого в 2 раза, то можно получить 4 «клетки», разбив равносторонний треугольник с помощью проведения отрезков, соединяющих середины сторон (рис. 35). Тогда получим 4 равносторонних треугольника со сторонами по 0,5 см, которые и будут у нас «клетками».

Так как «зайцев» 5, «клеток» 4 и $5 > 4$, то по принципу Дирихле найдется «клетка» — равносторонний треугольник со стороной 0,5 см, в который попадут не менее двух «зайцев»-точек. А так как все 4 треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5 см, то мы доказали, что между некоторыми двумя точками из пяти расстояние будет меньше, чем 0,5 см.)

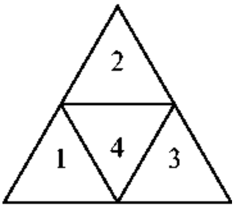


Рис. 35

Можно учащимся показать и другие возможные разбиения треугольника на «клетки» (показаны на рис. 36).

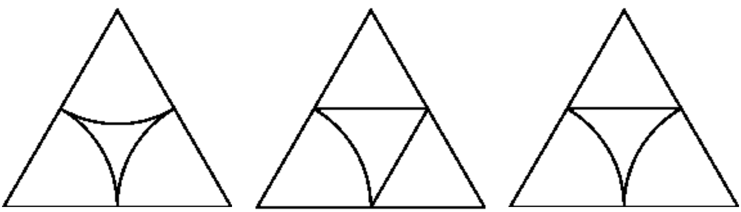


Рис. 36

3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

(*Решение.* Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки» — это остатки от деления целого числа на 11. Всего «клеток» будет 11: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Тогда по принципу Дирихле найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11 будет делиться на 11. Действительно, пусть $a = 11m + q$, $b = 11n + q$, тогда $a - b = 11m + q - (11n + q) = 11(m - n)$. А $11(m - n)$ делится на 11.)

4. В ковре размером 3×3 м Коля проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1×1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.)

В данной задаче для решения необходимо применить другую формулировку принципа Дирихле: «Пусть в n клетках сидят m зайцев, причем $n > m$. Тогда найдется хотя бы одна пустая клетка». Посмотрим, как эту формулировку принципа Дирихле можно применить при решении данной задачи.

(*Решение.* Здесь дырки будут «зайцами». Разрежем ковер на 9 ковриков размером 1×1 м. Так как ковриков-«клеток» 9, а дырок-«зайцев» 8, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри.)

Вывод. Таким образом, применяя данный метод, надо:
1) определить, что удобно в задаче принять за «клетки», а что — за «зайцев»;
2) получить «клетки»; чаще всего «клеток» меньше (больше), чем «зайцев», на одну (или более);
3) выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле.

Самостоятельная работа

5. Дано 9 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 8.

6. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

7. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым количеством иголок.

8. На дискотеку в студенческое обшежитие, в котором 42 комнаты, пришли 36 гостей. Докажите, что найдется комната, в которую не пришел ни один гость.

9. В классе 26 учеников, из них более половины мальчики. Докажите, что какие-то 2 мальчика сидят за одним столом, если в классе 13 столов.

Задачи-шутки

10. Как одним мешком пшеницы, смолов ее, наполнить два таких же мешка?

11. Что это: две головы, две руки, шесть ног, а идут или бегут только четыре?

12. Как-то в праздник один мой знакомый сказал мне: «Позавчера мне было 40 лет, а в будущем году исполнится 43 года». Могло ли такое быть?

Домашнее задание

13. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 см расположены 7 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя точками меньше, чем 1 см.

14. В вершинах квадрата записаны числа 3, 1, 2, 5. Разрешается прибавлять к любым двум числам, стоящим в квадрате, одно и то же целое число. Можно ли через несколько ходов получить во всех вершинах одинаковые числа?

15. Имеются два ведра — одно вместимостью 4 л, другое — 9 л. Можно ли набрать из реки ровно 6 л воды?

Решения и ответы

5. Решается задача аналогично задаче № 3. Только здесь будет 8 остатков: 0, 1, 2, ..., 7 — «клетки», а числа — их 9 — «зайцы».

6. Пусть 35 учеников — «зайцы», а буквы — это «клетки». В русском алфавите 33 буквы. Фамилии не могут начинаться разве что на Ъ и Ь. Так как $35 > 31$, то по принципу Дирихле найдутся 2 ученика, у которых фамилия начинается с одной буквы.

7. Пусть елки — «зайцы», а число иголок на елках: 0, 1, 2, 3, ..., 600 000 — «клетки». «Клеток» будет 600 001, а «зайцев» — 1 000 000. Здесь «зайцев» гораздо больше, чем «клеток». Тогда по принципу Дирихле в какой-то «клетке» будет находиться не менее двух «зайцев». Но если в одной «клетке» сидят два «зайца», то число иголок у этих елок будет одинаково.

8. Пусть комнаты — «клетки», а гости — «зайцы», имеем: $36 < 42$. Тогда по принципу Дирихле найдется, как минимум, одна пустая «клетка», то есть в какую-то комнату не придет ни одного гостя.

9. Пусть мальчики — «зайцы», а столы — «клетки». Так как мальчиков больше половины, то есть больше 13 — числа столов, то принципу Дирихле найдется стол, за которым сидят не менее двух мальчиков. А так как больше двух мальчиков за стол не помещается, то это означает, что найдется стол, за которым сидят 2 мальчика.

10. Надо в один пустой мешок вложить другой и высыпать пшеницу.

11. Всадник на лошади.

12. Да, если день рождения 31 декабря, а разговор был 1 января.

13. Примем 7 точек за «зайцев». Построим 6 «клеток». Для этого разобьем правильный шестиугольник на 6 правильных треугольников, как на рис. 37. Так как $7 > 6$, то по принципу Дирихле хотя бы в один треугольник попадут не менее двух точек. А расстояние между любыми двумя точками в правильном треугольнике со стороной 1 см меньше 1 см.

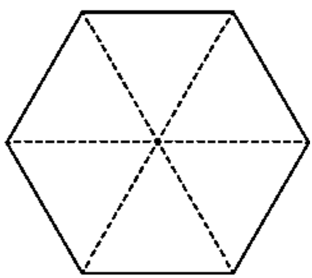


Рис. 37

14. Сумма чисел 3, 1, 2 и 5 равна 11 — нечетное число. После прибавления двух одинаковых целых чисел новая сумма будет вновь нечетной, в то время как сумма четырех одинаковых чисел четная. Значит, сколько бы ни делать ходов, сделать все числа в вершинах квадрата одинаковыми нельзя.

15. Да (решение в таблице).

4 л	0	0	4	0	4	0	1	1	4
9 л	0	9	5	5	1	1	0	9	6

Методический комментарий. Так как предлагаемая тема является для этого возраста очень сложной, то объяснение всех первых 4 задач надо провести самому учителю. При этом главное внимание обратить на процесс рассуждения и запись решения. Объяснение задач № 5–9 начинать после того, как некоторые учащиеся решат их. В задачах № 2 и 13 для учащихся 6 и 7 классов встретятся некоторые факты, которые не изучены на уроке. Поэтому право учителя — брать эти задачи для занятия или нет. При объявлении домашнего задания ввести понятие правильного многоугольника. Задача № 14 на повторение, а № 15 — на материал, который будет рассматриваться на следующем занятии. С решения данной задачи и можно его начать.

ЗАНЯТИЕ 8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ-2 (ПЕРЕЛИВАНИЯ)

Работа по теме занятия

1. Используя два ведра вместимостью 5 и 3 л, наберите из бочки 4 л воды.

2. Используя два ведра вместимостью 5 и 4 л, наберите из водопроводного крана 3 л воды.

3. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить ее, перевернув часы минимальное количество раз?

4. *Головоломка.* Малоопытный водитель автофургона пытался проехать во двор через туннель, но неточно рассчитал его высоту. В результате машина оказалась заклиненной, да так, что не могла тронуться с места. Шофер то заводил, то выключал двигатель, пытался двигаться вперед, назад — все было безрезультатно. Люди останавливались около машины, давали разные советы. Так продолжалось до тех пор, пока рядом не остановилась легковая машина, из которой вышел водитель и что-то тихо сказал малоопытному шоферу. Виновник беспорядка горячо поблагодарил за совет и быстро выполнил несложную работу. Затем без каких-либо препятствий проехал во двор. Какое действие выполнил шофер?

Задачи на повторение

5. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} ПОРТ \\ +ПОРТ \\ ПОРТ \\ \hline ТОРГ \end{array}$$

6. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал четное число прыжков.

7. Верно ли, что из любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна?

Самостоятельная работа

8. Используя девятилитровое ведро и четырехлитровый бидон, наберите из пруда 7 л воды.

9. Используя 2 ведра вместимостью 9 и 11 л, наберите из пруда 4 л воды.

Домашнее задание

10. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона. Воду выплескивать на землю нельзя, другими сосудами, кроме этих трех, пользоваться нельзя.

11. Волк и волчонок, медведь и медвежонок, лис и лисенок решили переправиться с левого берега реки на правый. У них была лодка, в которую помещались любые двое из них. Как им переправиться на другой берег, если нельзя оставлять детенышей с чужими папами без своего папы?

Предложить одному из учащихся подготовить сообщение на тему «Числа натурального ряда и мистические суеверия».

Решения и ответы

1.

3 л	0	0	3	0	2	2	3
5 л	0	5	2	2	0	5	4

2.

4 л	0	4	0	4	3
5 л	0	0	4	4	5

3. $15 = (11 - 7) + 11$. Одновременно перевернем часы, через 7 минут начинаем варить кашу. После 4 минут (песок в часах на 11 минут закончится) вновь перевернем часы на 11 минут.

4. Шофер слегка выпустил воздух из колес.

5. $2497 + 2497 + 2497 = 7491$.

6. Так как после каждого прыжка расстояние меняется с нечетного на четное, причем расстояние будет четным после четного числа прыжков, то в начало кузнечик должен вернуться после четного числа прыжков.

7. Пусть 3 числа — «зайцы», а «клетки» — множество четных чисел и множество нечетных чисел. «Клеток» 2. Так как $3 > 2$, то по принципу Дирихле найдутся, как минимум, 2 числа одинаковой четности: оба четные или оба нечетные. А сумма таких чисел — число четное.

8.

4 л	0	4	0	4	0	4	3	3	0	4	0
9 л	0	0	4	4	8	8	9	0	3	3	7

9.

9 л	0	0	9	0	2	2	9
11 л	0	11	2	2	0	11	4

10.

Ведро, 8 л	8	3	3	6	6	1	1
Бидон, 5 л	–	5	2	2	–	5	4
Банка, 3 л	–	–	3	–	2	2	3

11. Ответ в таблице

ПБ	ВвМм Лл	Мм Лл	Мм Лл	вмл	вмл	вм	вм	л	л	–	–
Лодка	–	Вв	в	МЛ	Л	Лл	л	вм	в	вл	–
ЛБ	–	–	В	В	ВМ	ВМ	ВМ Л	ВМ Л	ВМ мЛ	ВМ мЛ	ВвМм Лл

(здесь ПБ — правый берег, ЛБ — левый берег, В — волк, в — волчонок, М — медведь, м — медвежонок, Л — лис, л — лисенок).

Методический комментарий. Для задач на переливания лучше начинать решение с конца: как получить искомое количество жидкости. Подробно разобрать надо задачу, предложенную на дом, и задачи № 1 и 2. Для задачи № 1 рассуждения могут быть такими. Так как нам надо получить 4 л, то посмотрим, с помощью каких действий получается число 4, а именно: $4 = 5 - 1 = 2 + 2 = 3 + 1$. Ведро на 5 л у нас есть. Как получить 1 л? $1 = 3 - 2$. Ведро на 3 л у нас есть. Осталось получить 2 л. Но $2 = 5 - 3$, и решение задачи получили. Также необходимо отметить, что задачи на переливание решают несколькими способами, надо разбирать тот, который более быстро позволяет получить требуемое количество жидкости.

ЗАНЯТИЕ 9. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Работа по теме занятия

Ввести понятие высказывания как предложения, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Привести примеры. Предложить учащимся назвать высказывания. Потренироваться в построении отрицаний высказываний, особенно со словами «каждый», «любой», «хотя бы один» и т.д. После этого перейти к объяснению методов решения логических задач. Остановиться можно пока на двух: с помощью применения таблиц и с помощью рассуждения. Объяснение данных методов провести на примере следующих задач.

1. Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русый, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

(*Решение.* Для решения задачи воспользуемся таблицей 3×3. По условию задачи Белокуров не русый, Чернов не черный и Рыжов не рыжий. Это позволяет поставить знак «–» в соответствующих клетках. Кроме того, по условию Белокуров не брюнет, и, значит, в клетке на пересечении строки «Белокуров» и столбца «Черный» также надо поставить знак «–».

Фамилия \ Цвет волос	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров		–	–
Чернов		–	
Рыжов	–		

Из данных таблицы следует, что Белокуров может быть только рыжим. Поставим знак «+» в соответствующей клетке. Отсюда видно, что Чернов не рыжий. Обозначим это знаком «–» в таблице. Теперь ясно, что Чернов может быть только русым, а Рыжов — брюнетом.)

Фамилия \ Цвет волос	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров	+	–	–
Чернов	–	–	+
Рыжов	–	+	–

2. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили: «Не я», а Миша — «Не знаю». Потом оказалось, что двое из них сказали правду, а двое — неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло? Ответ объясните.

(*Решение.* Начнем с ответов Пети, Васи и Коли. Так как стекло разбил кто-то один, то среди ответов Пети, Васи и Коли может быть лишь один ложный, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое.

Тогда вторым ложным ответом будет ответ Миши, так как всего ложных ответов два. Поэтому Миша знал, кто разбил стекло.)

3. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген».

Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

(*Решение.* Так как ответом встреченного островитянина могла быть лишь фраза «Я — абориген» (этот ответ является правдой для аборигенов и ложью для пришельцев), а проводник сказал, что туземец — абориген, то проводник является аборигеном.)

Самостоятельная работа

4. Как перевезти в лодке с одного берега реки на другой волка, козла и капусту, если известно, что волка нельзя оставить без привязи с козлом, а козел неравнодушен к капусте? В лодке только два места, поэтому можно с собой брать одновременно или одно животное, или капусту.

5. Александр, Борис, Виктор и Григорий — друзья. Один из них врач, другой — журналист, третий — спортсмен, а четвертый — строитель. Журналист написал статьи об Александре и Григории. Спортсмен и журналист вместе с Борисом ходили в поход. Александр и Борис были на приеме у врача. У кого какая профессия?

6. В одном дворе живут четыре друга. Вадим и шофер старше Сергея; Николай и слесарь занимаются боксом; электрик — младший из друзей; по вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.

7. Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — еще не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зернышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

8. Четверо ребят — Алексей, Борис, Владимир и Григорий — участвовали в лыжных гонках. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они

ответили так.
Алексей: я не был ни первым и ни последним.
Борис: я не был последним.
Владимир: я был первым.
Григорий: я был последним.
Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один — ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

9. Коренными жителями острова являются рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Человек *А* говорит: «Я — лжец». Является ли он уроженцем острова рыцарей и лжецов?

Математический софизм

Под софизмом понимается мнимое доказательство, где кажущаяся обоснованность заключения чисто субъективна и вызвана недостаточностью логического анализа. Рассмотрим пример такого софизма.

10. Докажем, что $2 \cdot 2 = 5$. «Доказательство»: $1 = 1$. Заменим 1 как $4 : 4$ и $5 : 5$. В итоге получим: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем в левой части равенства за скобки 4, а в правой — 5, в итоге получим, что $4 \cdot (1 : 1) = 5 \cdot (1 : 1)$. Разделим обе части равенства на число в скобках: $1 : 1$. Тогда получим: $4 = 5$. А так как $4 = 2 \cdot 2$, то получили, что $2 \cdot 2 = 5$. Где ошибка?

Домашнее задание

11. Из четырех учеников — Антона, Бори, Васи и Гали — один отличник. Кто отличник, если:
1) в тройке «Антон, Боря, Вася» есть отличник;
2) в тройке «Антон, Вася, Галя» есть отличник;
3) Антон не отличник?

12. На острове два города, в одном живут рыцари, говорящие только правду, а в другом — лжецы. Встретились три человека *А*, *В* и *С*.
А говорит: «*В* — лжец».
В говорит: «*А* и *С* из одного города».
Кто такой *С*?

13. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?

Решения и ответы

4. *Первым рейсом* перевозчик берет в лодку козла, оставляя на берегу волка и капусту.

Вторым рейсом перевозчик берет с собой волка, оставляя на берегу капусту. Переехав реку, перевозчик оставляет волка на берегу, а козла забирает в лодку и возвращается с ним обратно.

Третьим рейсом перевозчик берет с собой капусту, выгрузив козла. Переехав реку, он оставляет капусту с волком и возвращается за козлом.

И наконец, в четвертым рейсом он перевозит через реку козла.

5. Рассмотрим решение задачи с помощью таблицы.

	Александр	Борис	Виктор	Григорий
Врач	–	–		
Журналист	–	–		–
Спортсмен		–		
Строитель				

Так как журналист написал статьи об Александре и Григории, то журналиста звали не Александр и не Григорий. Так как спортсмен и журналист ходили с Борисом в поход, то спортсмена и журналиста звали не Борисом. Из того, что Александр и Борис были у врача, следует, что они — не врачи. Поставив соответствующие минусы в клетках таблицы, получаем, что Борис — строитель.

	Александр	Борис	Виктор	Григорий
Врач	–	–		
Журналист	–	–		–
Спортсмен		–		
Строитель	–	+	–	–

Учитывая это, получаем, что Александр — спортсмен, Григорий — врач, а Виктор — журналист.

(*Ответ:* Борис — строитель, Александр — спортсмен, Григорий — врач, Виктор — журналист.)

6. Используем для решения таблицу.

	Вадим	Сергей	Николай	Антон
Шофер	–	–		
Слесарь			–	
Электрик		–		–
Токарь		–		–

Так как Вадим и шофер старше Сергея, то Вадим и Сергей — не шоферы. Ставим два минуса в соответствующих клетках таблицы. Так как Николай и слесарь занимаются боксом, то слесарь — не Николай. В соответствующей клетке ставим минус. Так как Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика, то Антон и Сергей — не токари и не электрики. Получаем еще четыре минуса в клетках таблицы. Таким образом, выходит, что Сергей может быть только слесарем. Ставим в соответствующих клетках таблицы плюс и минусы.

	Вадим	Сергей	Николай	Антон
Шофер	–	–		
Слесарь	–	+	–	–
Электрик		–		–
Токарь		–		–

Тогда Антон — шофер. Выяснить, кто Николай и Вадим, помогут высказывания: «Вадим и шофер старше Сергея», «электрик — младший из друзей». Значит, Вадим — не электрик, поэтому Вадим — токарь, а Николай — электрик.

(*Ответ:* Сергей — слесарь, Антон — шофер, Вадим — токарь, Николай — электрик.)

7. Золушка взяла зернышко из мешка с надписью «Смесь»; так как ни одна табличка не соответствовала содержимому мешка, то там был мак или просо. Если взятое Золушкой зернышко — мак, то в мешке с надписью «Смесь» — *мак*. Тогда в мешке с надписью «Мак» — *просо*, а в мешке с надписью «Просо» — *смесь*.

Аналогично, если взятое зернышко — просо, то в мешке с надписью «Смесь» — *просо*. Тогда в мешке с надписью «Мак» — *смесь*, а в мешке с надписью «Просо» — *мак*.

8. Предположим, что солгал Алексей. Тогда получается, что он был первым или последним. Значит, солгали еще Владимир или Григорий. А это противоречит тому, что солгал всего один из ребят. Пусть солгал Борис. Тогда он был последним. Но Григорий также утверждал, что он был последним. Значит, данного случая также не может быть. Пусть солгал Владимир. Тогда он был не первым. В этом случае все получается, и первым тогда будет Борис. Последний случай, когда солгал Григорий, быть не может, так как тогда последним никто из ребят не был.

(*Ответ:* правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.)

9. Пусть *А* сказал правду, значит, он — лжец. Но он не может быть лжецом, так как лжецы всегда лгут. Пусть *А* сказал ложь, тогда он — рыцарь. Но рыцари говорят правду. Опять не получается. Значит, *А* не может быть уроженцем острова.

10. Ошибка состоит в вынесении за скобку чисел 4 и 5 — это делать нельзя.

11. Так как в тройках «Антон, Боря, Вася» и «Антон, Вася, Галя» есть отличник, то это могут быть Антон или Вася. Но известно, что Антон не отличник, значит, отличник — Вася.

12. Рассмотрим два случая.

1) Пусть *А* говорит правду, тогда *В* — лжец. Так как *В* — лжец, то *В* и *С* не из одного города, поэтому *С* — рыцарь.

2) Пусть *А* говорит ложь, тогда *В* — рыцарь. А так как *В* говорит правду, то и *С* — рыцарь.

(*Ответ: С* — рыцарь.)

13. Найдем сначала возраст Бори. Так как в детский сад ходит девочка, то это не Боря. Тогда Боре больше 5 лет.

Так как Аня старше Бори, то Боре не может быть 15 лет. Так как сумма лет Ани и Веры делится на три, то, учитывая возраст детей в семье, это может быть в следуюших случаях:

1) одной девочке 5 лет, а другой 13 лет;
2) одной девочке 8 лет, а другой 13 лет.

В обоих случаях одной девочке 13 лет. Следовательно, Боре не 13 лет. Имеем: Боре не 5 лет, не 15 и не 13. Тогда Боре 8 лет.

Установим теперь возраст каждой девочки. Так как сумма лет Ани и Веры делится на три, а Боре 8 лет, то возможен лишь один случай: девочкам 5 и 13 лет. А так как по условию Аня старше Бори, то Ане 13 лет. Тогда Вере будет 5 лет, а Гале 15 лет.

ЗАНЯТИЕ 10. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ-3 (МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ, ВЫИГРЫШНЫЕ СИТУАЦИИ)

Работа по теме занятия

1. Бился Иван-царевич со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым. Одним ударом он мог срубить либо одну голову, либо один хвост, либо две головы, либо два хвоста. Но если срубить один хвост, то вырастут два; если срубить два хвоста — вырастет голова; если срубить голову, то вырастет новая голова; а если срубить две головы, то не вырастет ничего. Объясните, как должен действовать Иван-царевич, чтобы срубить Змею все головы и все хвосты как можно быстрее.

(*Решение.* Так как рубить головы по одной не имеет смысла, а при рубке хвостов рано или поздно появятся новые головы, то Иван-царевич должен действовать так, чтобы у Змея не осталось хвостов, а количество голов стало четным. Для этого надо сначала три раза срубить по одному хвосту, и их будет шесть. Затем три раза срубить по два хвоста, и у Змея станет шесть голов, а потом три раза срубить по две головы, и тогда у Змея не останется ни хвостов, ни голов.

Возможен также вариант, когда Иван-царевич сначала срубает две головы, а потом действует так же, как в предыдущем случае, тогда на последнем этапе у змея будет не шесть голов, а четыре. Общее число ударов, которое должен сделать Иван-царевич (девять), при этом не изменяется.

Ответ: три раза срубить по одному хвосту, три раза срубить по два хвоста, три раза срубить по две головы.)

2. Перед Бабой-ягой и Кощеем Бессмертным лежат две кучи мухоморов, в одной 100 штук, а в другой 150 штук. Они по очереди берут грибы из куч, за один раз можно взять любое ненулевое число грибов из одной кучи. Пропускать ход нельзя, выигрывает тот, после хода которого грибов не останется. Первой ходит Баба-яга. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

(*Решение.* Победит Баба-яга с помощью следующей стратегии. Каждым своим ходом она уравнивает число грибов в кучах, имеющееся к ее ходу.)

3. Двое по очереди кладут пятирублевые монеты на круглый стол. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередную монету (монеты не должны накладываться друг на друга). Кто выиграет при правильной стратегии?

(*Решение.* Выиграет первый. Для этого он первым ходом должен положить свою монету в центр симметрии стола. После чего на ход второго у него всегда будет симметричный ход.)

4. Ладья стоит на поле $a1$. За один ход разрещается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выиграет тот, кто поставит ладью на поле $h8$. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией?

(*Решение.* Выигрыщной стратегией обладает второй игрок: после хода первого игрока он возвращает своим ходом ладью на диагональ $a1-h8$. Первый игрок вынужден будет каждый раз уводить ладью с этой диагонали. Так как поле $h8$ принадлежит диагонали $a1-h8$, на него сумеет поставить ладью именно второй игрок.)

Методический комментарий. Разбирая на занятии данные задачи, учитель может сформулировать выводы:

1. Есть проигрышные и выигрышные ситуации. В задаче № 4, изменив начальное поле *a*1 на *a*2, мы получим выигрышную ситуацию для первого игрока.

2. Наиболее часто при решении подобного рода задач применяются следующие основные идеи:

а) нахождение удачного ответного хода, который обеспечивается или симметрией (задача № 3), или разбиением на пары, или дополнением до определенного числа (задача № 2);

б) решение с конца (задача № 1).

Самостоятельная работа

5. Алеша Попович и Добрыня Никитич воюют с девятиглавым змеем. Они по очереди ходят к его пещере и отрубают 1, 2 или 3 головы. Как начинающему бой Алеше обрести славу победителя змея (то есть отрубить последнюю голову)?

6. В куче лежат 50 камней. Двое по очереди добавляют в нее любое число камней от 1 до 10. Выиграет тот, кто первым сумеет довести количество камней до 100. Кто это будет — первый или второй? Сколько ходов потребуется победителю?

7. Брат и сестра по очереди пишут цифры со старшего разряда по порядку вплоть до младшего. Начинать с нуля нельзя, а остальные цифры совершенно произвольные. Если записанное число разделится нацело на 11, то победителем объявляется написавший последнюю цифру, а если не разделится, то победителем будет написавший предпоследнюю цифру. Кто выиграет при правильной игре, если всего должно быть записано 6 цифр?

8. *Задание на смекалку.* Слова во фразе стоят на своих местах, но буквы внутри каждого слова переставлены. Например: «ПШЬОПЕШИС — ЙЮДЛЕ ШЕСАМЬШИН» — «ПОСПЕШИШЬ — ЛЮДЕЙ НАСМЕШИШЬ». Поставьте буквы на свои места, прочтите и запишите получившуюся фразу: «КОМСАВ ЕН СУЗАР ЛИСТАСОРЬ».

Домашнее задание

9. Решите ребус, если одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные цифры — разными:

ВАГОН + ВАГОН = СОСТАВ

10. В подвале замка Баскервиль-Холл лежат две кучи камней, по 100 штук в каждой. Шерлок Холмс и доктор Ватсон по очереди берут из них камни, за один раз можно взять любое ненулевое число камней из одной кучи. Пропускать ход нельзя, проигрывает тот, после хода которого камней не останется. Первым ходит Холмс. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

11. Вася и Петя играют в следуюшую игру. Сначала имеется число 1. Первым ходом его можно умножить на любое число от 2 до 9 включительно. Следующим ходом получившееся число умножают на любое число от 2 до 9 и т.д. Ходы делают по очереди. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Начинает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

Решения и ответы

5. Рассуждаем с конца. Чтобы победить Алеше, перед его последним ударом у змея должно остаться не более 3 голов. Значит, при последнем ударе Добрыни у змея должно быть 4 головы. Тогда, срубив любое число голов, Добрыня проигрывает. До этого удара вместе они срубили 5 голов: два раза рубил Алеша и один раз — Добрыня. Тогда стратегия Алеши будет такой: первым ударом он срубает 1 голову, а вторым — в зависимости от того, сколько голов срубил Добрыня (Добрыня — 1, Алеша — 3; Добрыня — 2, Алеша — 2; Добрыня — 3, Алеша — 1).

6. Рассуждаем с конца. Чтобы последним ходом игроку получить 100, предыдущим надо получить 89 камней, а до этого 78; 67; 56. Значит, выиграет первый при такой стратегии: сначала он добавляет 6 камней в кучу, камней будет 56. Второй кладет k камней, а первый дополняет это число до 11, то есть кладет $11 - k$ камней.

Третьим ходом первый получает 78 камней, четвертым — 89 и пятым — 100.

7. Выиграет тот, кто будет писать вторым. Ему надо копировать цифры первого. Тогда получится число *aabbcc*, которое делится на 11.

8. Москва не сразу строилась.

9. 85 679 + 85 679 = 171 358.

10. Выиграет доктор Ватсон. Он должен руководствоваться следующей стратегией. Если после очередного хода Холмса в каждой куче осталось не менее чем по 2 камня, то Ватсон уравнивает число камней в кучах. Если после хода Холмса в одной из куч остался 1 камень, а в другой не менее одного, то Ватсон забирает все камни из второй кучи (где не менее одного камня). Если после хода Холмса в одной из куч 0 камней, а в другой не менее двух, то Ватсон берет из последней кучи все камни, кроме одного. Наконец, рассмотрим ситуацию, когда после хода Холмса остался 1 камень в одной куче и 0 — в другой и Ватсон должен вроде как проиграть. Но возможно ли это? При этом перед ходом Холмса в кучах должно быть либо 0 и N камней, либо 1 и N камней. Но, по стратегии Ватсона, после его хода может остаться либо N и N, либо 1 и 0 камней, то есть рассмотренные выше ситуации для Холмса просто невозможны.

11. Первым ходом Вася умножает данное число 1 на 4, 5 или 6. После любого ответного хода Пети образуется число в диапазоне от 8 до 54. Умножая это число на соответствующее однозначное, Вася всегда сможет получить число в диапазоне от 56 до 111. В этом случае после ответного хода Пети число будет лежать в диапазоне от 112 до 999 и следующим ходом Вася обязательно выиграет.

(*Ответ:* выиграет Вася.)

Методический комментарий. Если в 5 классе на занятии кружка не рассматривался признак делимости на 11, то его необходимо сформулировать: если разность суммы цифр, стоящих на четных местах и стоящих на нечетных местах, делится на 11, то и само число делится на 11. (Данный признак будет применяться при решении задачи № 7.) А так как число шестизначное, то максимальная сумма трех цифр может быть 27. Значит, надо записать такое число, разность сумм цифр у которого, стоящих на четных и нечетных местах, была бы 0, 11 или 22. Впрочем, некоторые школьники смогут рещить эту задачу и без указанного признака, сразу догадавшись, что число *aabbcc* делится на 11.

Так как наибольшие трудности вызывает решение задачи № 11, то можно порекомендовать задать учащимся наводящие вопросы.

- При каких вариантах чисел возможен выигрыщ одним ходом?
- Какие варианты чисел могут получиться при первом ходе Пети, при втором ходе Васи?
- Как поступить Васе при первом ходе, чтобы выиграть?

ЗАНЯТИЕ 11. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Работа по теме занятия

1. Выписаны подряд все натуральные числа:

$$123456789101112\ldots.$$

Какая цифра будет записана на 2005-м месте?

2. Сколькими нулями оканчивается число

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 99\cdot 100?$$

3. Вычислите: $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{2011\cdot 2012}$.

4. Какой цифрой оканчивается число 3^{2012}?

Сообщение ученика: «Числа натурального ряда и мистические суеверия» (примерное содержание сообщения)

Натуральные числа возникли с появлением у человека потребности к практической деятельности. Числовые представления (как и наша речь) неразрывно связаны с существованием самого человека, так как на всех этапах своей истории он был связан с процессом счета окружающих предметов и проведением каких-то измерений. Этот процесс у отдельных народностей, находящихся на ранней стадии своего развития, не заходил дальше определенного числа. Некоторые числа человек связывал с конкретными представлениями об окружающих предметах: один — голова, Солнце, Луна и т.д., два — пара глаз, пара рук, пара ушей и т.д. Также число «два» стояло в основе противопоставлений. Например, небо и Земля, день и ночь, жизнь и смерть. До настоящего времени существуют племена, у которых этот процесс ограничен числами «два» или «три» и числом, которое равносильно понятию «много» или «тьма», не поддается счету и находится за пределами человеческих возможностей.

Наибольшие числа натурального ряда, которые постигались в результате счета, породили у человека много числовых суеверий и мистических представлений, были для него таинственными, наделялись сверхъестественными свойствами и считались священными.

Приписывал числам такие свойства даже греческий математик Никомах, живший в конце I в. н.э., автор знаменитой книги «Введение в арифметику». Он полагал, что «...единица есть разум, добро, гармония, счастье и в то же время материя, тьма, хаос; она соединяет в себе четное с нечетным и женское с мужским. Два есть начало неравенства, противоречия; оно есть мнение, ибо во мнении встречаются истина с ложью. Три есть первое настоящее число, так как оно имеет начало, середину и конец и потому есть число совершенное».

У многих народов больше всего суеверий связано с числами «три», «семь» и «тринадцать».

Суеверия, связанные с числом «три», относятся к тому времени, когда у древних людей счет не доходил дальше трех. На этой основе в христианской религии возведено в догму представление о Святой Троице — о едином Боге, выступающем в трех лицах: Бога Отца, Бога Сына, Бога Духа Святого. Сюда же относится и так называемое трехперстное крестное знамение, якобы защищающее верующих от злых духов. Существует масса пословиц и поговорок, содержанием которых является число «три», приносящее несчастье: «третий не прикуривает», «не везет до трех раз» и т. д. В то же время имеется ряд других пословиц и поговорок, которые говорят о том, что это число приносит счастье. Число «три» очень часто встречается в русских народных сказках: три царевны, три сына, на третий раз и т. п. Любопытно то, что число «три» рассматривалось не только как счастливое (Бог любит троицу), но и как несчастное (треклятый).

Аналогично происхождение примет, пословиц и поговорок, связанных с числом «семь». В Древнем Вавилоне люди наблюдали семь небесных тел: Солнце, Луну, Марс, Меркурий, Юпитер, Венеру и Сатурн. Они обожествляли их и почитали. Каждый седьмой день считался священным и объявлялся днем отдыха от трудов, а планетам астрологи приписывали (и теперь приписывают) особое свойство, которое оказывает влияние на судьбы людей. Поэтому число «семь» в Древнем Вавилоне имело магическое действие. Для арабов, ассирийцев, евреев это число было клятвенным. В Библии говорится о «семи духах божьих», «семи светильниках» и т. д.; У греков: «семь чудес света», «семь мудрецов» и т. д.; «крепко, как семь» — клятва у французов. У русских: «у семи нянек дитя без глазу», «семь раз отмерь, один раз отрежь», «семь бед — один ответ», «семеро одного не ждут» и т. д. Число «семь» считается счастливым. Почему? Ответ был получен американским психологом Миллером. Он объяснил особенности числа «семь» пропускной способностью нервной системы человека. На основании экспериментальных данных оказалось, что самые разные испытуемые могут без ошибок сравнить в среднем только 7 раздражителей, а человек при кратковременном восприятии мгновенно может охватить не более семи сходных предметов.

Всем известен панический страх перед числом «тринадцать» («чертовой дюжиной»). Истоки этого поверья относятся к древним временам, когда у некоторых народов основанием системы счисления было число «двенадцать» (отсюда деление года на 12 месяцев, счет дюжинами и т. д.). Оно замыкало для них натуральный ряд, поэтому за числом 12 шло неизвестное, непостижимое число, а значит, опасное для простых смертных. По их представлению, это число могло приносить только несчастье. В связи с этим во многих гостиницах некоторых стран (Англия, США и др.) отсутствуют номера с числом «тринадцать», лифт не останавливается на тринадцатом этаже, нет маршрутов городского транспорта с номером «тринадцать» и т.д. Моряки стараются тринадцатого числа не выходить в море.

У славян суеверий, относящихся к числу 13, не было. В качестве примера можно привести такой факт. В Древней Руси были возведены храмы с тринадцатью куполами — Софийский в Новгороде, Полоцкий и Киевская София, однако несчастливыми они не считались.

Самостоятельная работа

Для всех учащихся.

5. Вычислите: $(2+4+6+\ldots+2012)-(1+3+5+\ldots+2011)$.

6. Делится ли число $11\cdot21\cdot31\cdot41\cdot51\cdot\ldots\cdot2001-1$ на 10? Почему?

7. Из числа 123456789101112…9899100, образованного путем последовательного приписывания друг за другом всех чисел от 1 до 100, вычеркните 100 таких цифр, чтобы оставшееся число было наибольшим.

8. Найдите дробь со знаменателем 19, которая больше $\frac{5}{7}$, но меньше $\frac{6}{7}$.

Для учащихся 6 класса.

9. Сколько всего пятизначных чисел можно составить из цифр 0 и 1? Цифры могут повторяться. Запишите эти числа.

10. Запишите число 1 000 000, имея только цифру 3, знаки арифметических действий и скобки, если они необходимы. Можно ли в этой записи обойтись без деления?

11. Запишите число 100:

а) с помощью пяти единиц и знаков действий;

б) с помощью пяти пятерок и знаков действий;

в) с помощью пяти троек и знаков действий.

Для учащихся 7 класса.

12. Найдите последнюю цифру числа 8^{2010}.

13. Сравните 31^{11} и 17^{14}.

14. Что больше: $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$? Найдите несколько способов решения.

15. Какой цифрой оканчивается число

$$11^{11}+12^{12}+13^{13}?$$

Домашнее задание

Всем учащимся.

16. Поставьте в выражении скобки так, чтобы получилось верное равенство: $270 + 120 + 390 : 3 \cdot 5 = 1120$.

17. На некотором острове каждый житель является либо рыцарем (всегда говорит правду), либо лжецом. Из трех островитян двое сказали:
первый: «Мы все лжецы»,
второй: «Только один из нас рыцарь».
Кто из них рыцарь, а кто лжец?

Учащимся 6 класса.

18. Сколько всего имеется пятизначных чисел, сумма цифр в которых равняется трем? Причем в записи каждого числа цифра 1 может встречаться не более одного раза.

Учащимся 7 класса.

19. Какое из чисел: 127^{23} или 513^{18} — больше?

Решения и ответы

1. Начнем считать цифры. От 1 до 9 девять цифр; от 10 до 99 — 180; остается $2005 - 189 = 1816$. Далее идут трехзначные числа; 1800 цифр будет использовано до числа 699 включительно. Еще 16 цифр уйдет на следующие 5 чисел и первую цифру шестого числа. А это цифра 7.

2. Нули получаются от перемножения цифры 5 на четное число. Сосчитаем число пятерок в произведении. Так как на 5 делится каждое пятое число, то 20 пятерок получим при делении 100 на 5. Но есть числа, дающие по 2 пятерки: это 25, 50, 75, 100. Значит, всего в произведении будет 24 пятерки. Четных же чисел будет больше. Итак, на конце числа будет 24 нуля.

3. Представим каждую дробь вида $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ в виде разности двух дробей: $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2011\cdot 2012}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}=$$
$$=1-\frac{1}{2012}=\frac{2011}{2012}.$$

4. Рассмотрим степени тройки: $3^1=3$; $3^2=9$; $3^3=27$; $3^4=81$; $3^5=243$; $3^6=729$. Замечаем, что 3^1 и 3^5 оканчиваются на одну цифру 3; 3^2 и 3^6 — на цифру 9 и т.д. То есть через 4 последняя цифра повторяется. Тогда все числа вида 3^{4p+q} заканчиваются той же цифрой, что и 3^q. Так как $2012=4\cdot 503$, то последняя цифра числа 3^4 будет такая же, как и у числа 3^{2012}, то есть 1.

5. Исходная сумма равна

$$(2+4+6+\ldots+2012)-(1+3+5+\ldots+2011)=$$
$$=2+4+6+\ldots+2012-1-3-5-\ldots-2011=$$
$$=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\ldots(2012-2011)=1+1+\ldots+1=1006.$$

6. Последняя цифра первого слагаемого оканчивается на 1, поэтому разность оканчивается 0. Значит, число делится на 10.

7. Число будет наибольшим, если в старших разрядах будут стоять девятки. В связи с этим вычеркиваем первые восемь цифр, затем цифры чисел от 10 до 18 и единицу у 19 и так далее до цифры 4 у числа 49. Таким образом, было вычеркнуто $8+19+19+19+19=84$ цифры. Осталось вычеркнуть еше 16 цифр, а именно цифры чисел 50, 51, 52, …, 56 (14 цифр) и дважды цифру 5 у чисел 57 и 58. Всего, таким образом, вычеркнули 100 цифр. Получили число 9999978596061…9899100.

8. $\frac{14}{19}$; $\frac{15}{19}$, $\frac{16}{19}$.

9. 16: 10 000, 10 001, 10 010, 10 011, 10 100, 10 101, 10 110, 10 111, 11 000, 11 001, 11 010, 11 011, 11 100, 11 101, 11 110, 11 111.

10. $3\,333\,333 : 3 - 333\,333 : 3 = 1\,000\,000$ или $333\,333 \cdot 3 + 3 : 3 = 1\,000\,000$. Нет, так как всегда будет число, кратное трем.

11. а) $111 - 11 = 100$;

б) $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$;

в) $33 \cdot 3 + 3 : 3 = 100$.

12. Находя значения степени 8^1, 8^2, 8^3, 8^4, 8^5 и т.д., замечаем закономерность: последней цифрой являются 8, 4, 2, 6, а далее они повторяются. Так как $2010 = 502 \cdot 4 + 2$, то 8^{2010} оканчивается той же цифрой, что и 8^2, то есть 4.

13. Так как 31 и 17 находятся рядом со степенями числа 2, то получаем: $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$. Таким образом, $31^{11} < 17^{14}$.

14. *1-й способ.* Найдем разность второй и первой дробей, после упрощения получим:

$$\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1} - \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} = \frac{2 \cdot 10^{11} - 10^{12} - 10^{10}}{(10^{12}+1)\cdot(10^{11}+1)} =$$

$$= \frac{-81 \cdot 10^{10}}{(10^{12}+1)\cdot(10^{11}+1)} < 0.$$

Поэтому

$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} > \frac{10^{11}+1}{12^{11}+1}.$$

2-й способ. Найдем частное первой и второй дробей, после упрощения получим:

$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} : \frac{10^{11}+1}{10^{12}+1} = \frac{10^{22}+10^{12}+10^{10}+1}{10^{22}+2\cdot 10^{11}+1} > 1,$$

значит, первая дробь больше.

15. Число 11^n оканчивается всегда единицей.

Число 12^n оканчивается на 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, …, то есть через 4 цифры повторяются. Так как $12 = 4 \cdot 3$, то 12^{12} оканчивается шестеркой.

Число 13^n оканчивается на 3, 9, 7, 1, 3, ..., то есть снова цифры повторяются с периодом 4. Так как $13 = 4 \cdot 3 + 1$, то 13^{13} оканчивается тройкой. Так как $1 + 6 + 3 = 10$, то сумма оканчивается нулем.

16. $270 + (120 + 390) : 3 \cdot 5 = 1120$.

17. Рассмотрим несколько вариантов. Пусть первый — рыцарь. Тогда получается, что высказывание «Мы все лжецы» верное. Но это противоречит тому, что первый — рыцарь. Поэтому первый — лжец. И значит, не все лжецы.

Пусть второй — лжец. Тогда высказывание «Только один — рыцарь» ложное, значит, рыцарей не 1, а 0 или 2. Но первый — лжец и второй — лжец. Значит, и третий — лжец, но это противоречит словам первого, так как не все лжецы.

Значит, второй — рыцарь. И он говорит правду. Поэтому третий — лжец.

Итак, лжецы — первый и третий, а рыцарь — второй.

18. 9: 21 000, 20 100, 20 010, 20 001, 12 000, 10 200, 10 020, 10 002, 30 000.

19. Рассмотрим следствия двух очевидных неравенств:

$$127 < 128 \Rightarrow 127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161},$$

$$513 > 512 \Rightarrow 513^{18} > 512^{18} = (2^9)^{18} = 2^{162}.$$

Так как $2^{162} > 2^{161}$, то и $513^{18} > 127^{23}$.

Методический комментарий. В связи с тем, что на олимпиадах задания по арифметике в 6 и 7 классах сильно отличаются, была предложена такая структура занятия.

ЗАНЯТИЕ 12. ПОВТОРЕНИЕ

Работа по теме занятия

1. Какой цифрой оканчивается число 2014^{2015}?

2. Клоуны Бим, Бам и Бом вышли на арену в красной, синей и зеленой рубашках (все в разных). Их туфли были тех же цветов (у каждого клоуна свой). Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зеленые, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

3. Найдите значение дроби:

$$\frac{\text{К} \cdot \text{О} \cdot \text{Т} \cdot \text{Л} \cdot \text{А} \cdot \text{С}}{\text{К} \cdot \text{О} \cdot \text{Р} \cdot \text{Я} \cdot \text{Ж} \cdot \text{М} \cdot \text{А}}.$$

4. Баба-яга поссорилась со Змеем Горынычем и стала рубить ему головы. При этом она может отрубить ему 1, или 2, или 3 головы. Первоначально у Змея Горыныча было 3 головы. Когда ему отрубают 1 голову, то у него вырастают 3 новые головы; если же отрубают 2 головы, то ничего не вырастает; а если отрубают 3 — вырастает 1 новая голова. Сможет ли Баба-яга отрубить Змею Горынычу все 3 головы окончательно, так чтобы больше голов у него не отрастало?

5. Двое учашихся играют в такую игру. Первый называет двузначное число, второй прибавляет к нему еше какое-нибудь однозначное число; к полученной сумме первый снова прибавляет однозначное число и так далее, пока не получится число 100. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй? (Выигравшим считается тот, кто прибавляет последнее число для получения 100.)

6. Сократите дробь: $\frac{609609609}{205205205}$.

7. В первенстве по хоккею участвуют 5 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент соревнований имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Математические фокусы

Большинство математических фокусов связано с угадыванием чисел. Математической основой фокуса чаше всего является некоторое тождество. Все фокусы на угадывание чисел делятся на две группы:

1) угадывается само задуманное число; при этом отгадчику сообшается результат некоторых операций, проведенных над задуманным числом;

2) угадывается результат некоторых операций над задуманным числом; в этом случае результат не зависит от величины задуманного числа.

Рассмотрим примеры фокусов из каждой группы.

8. Задумайте число, удвойте его, к полученному произведению прибавьте пять. К полученному числу прибавьте 4 раза его же, затем к результату прибавьте 10. Полученную сумму умножьте на 10. Какое число у вас получилось? В чем секрет фокуса?

Секрет фокуса. Пусть задумано число x. Проследим, какие изменения будут с ним происходить. Удвоили — стало $2x$, прибавили 5 — стало $2x + 5$. Взяли число 5 раз — получили $10x+25$. Прибавили к результату 10 — получили $10x + 35$. Умножили эту сумму на 10 — получили $100x + 350$. Итак, после вычитания числа 350 задуманное число будет равно числу сотен у оставшегося числа.

9. Запишите любое трехзначное число, но такое, чтобы крайние цифры отличались на 5. Поменяйте местами в этом числе крайние цифры. Получили второе число. Вычтите из большего числа меньшее. Разделите разность чисел на 9. Ответом будет число 55. Почему?

Секрет фокуса. Первое число $100a + 10b + c$, где a, b, c — соответственно числа сотен, десятков и единиц. Тогда второе число $100c+10b+a$. Найдем разность чисел (пусть первое у нас больше): $99a - 99c$. После деления данной разности на 9 получим число $11(a-c)$. Так как $a-c=5$, то результат будет равен 55.

Домашнее задание

10. Тетрадь, ручка, карандаш и книга стоят вместе 37 рублей. Тетрадь, ручка и карандаш стоят 19 рублей. Книга, ручка и карандаш стоят 35 рублей. Тетрадь и карандаш вместе стоят 5 рублей. Сколько стоит каждый предмет в отдельности?

11. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см и так далее. Может ли он после 2013 прыжков оказаться там, где начинал? Почему?

12. Придумайте свой математический фокус.

Решения и ответы

1. Число 2014^1 оканчивается на 4, 2014^2 — на 6, 2014^3 — на 4. Таким образом, число 2014^{2m} оканчивается на 6, а 2014^{2m+1} — на 4. Так как 2015 — нечетное число, то число 2014^{2015} оканчивается на 4.

2. Составить 2 таблицы. Ответ: Бом в синих туфлях и зеленой рубашке, Бим в красной рубашке и красных туфлях.

3. Так как в этом ребусе 10 различных букв и цифр — 10, то каждая цифра будет встречаться один раз, в том числе и 0. На нуль делить нельзя, поэтому 0 в числителе. (*Ответ:* 0.)

4. Чтобы у Змея Горыныча голов не осталось, необходимо, чтобы после очередного удара их было 2. Но после каждого удара количество голов меняется на четное число, поэтому количество голов будет все время нечетным. А значит, Бабе-яге не удастся отрубить все головы у Змея Горыныча.

5. Первому достаточно назвать любое число до 100, оканчивающееся на 0, и он выигрывает.

6. $\dfrac{609609609}{205205205} = \dfrac{609 \cdot 1001001}{205 \cdot 1001001} = \dfrac{609}{205}$.

7. Рассмотрим 2 случая.

1. Все команды сыграли хотя бы один матч. Тогда число сыгранных матчей каждой командой могло быть 1, 2, 3 или 4. Примем эти 4 варианта за «клетки», тогда 5 команд будут «зайцами». Так как $5 > 4$, то по принципу Дирихле найдется не менее 2 команд, сыгравших одинаковое число матчей.

2. Пусть есть команда, не игравшая матчей. Тогда число сыгранных матчей может быть 0, 1, 2 или 3. Так как команд 5, а вариантов опять 4, то найдутся, как минимум, 2 команды, которые сыграли к данному моменту одинаковое число матчей (возможно, ни одного).

10. Два первых набора отличаются на книгу, отсюда следует, что книга стоит $37-19=18$ (рублей). Аналогично из первого и третьего условий следует, что тетрадь стоит $37-35=2$ (рубля). Ну и далее карандаш — 3 рубля, а ручка — 14 рублей.

11. Нет. Действительно, пусть кузнечик начинает прыгать из точки 0, тогда после нечетного (по номеру) прыжка четность координаты кузнечика меняется, а после четного прыжка не меняется. Далее рассмотрим четность координаты, начиная с 1-го прыжка:

ННЧЧННЧЧННЧЧ...

— и найдем, что будет на 2013-м месте в этой последовательности. Так как последовательность повторяется через 4, а $2013 = 503 \cdot 4 + 1$, то после 2013-го прыжка координата точки, в которую попадет кузнечик, будет нечетной. А число 0 четное.

ЗАНЯТИЕ 13. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОРЕВНОВАНИЕ (МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРУСЕЛЬ)

Правила математической карусели

Математическую карусель придумали И. Рубанов, К. Кноп, С. Волченков в 1997 г. Это разновидность командных соревнований по решению задач. Состав команды — 6 человек. Побеждает в карусели команда, набравшая наибольшее число очков. При этом задачи решают на двух рубежах — исходном и зачетном. Но очки начисляют только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присваиваются номера от 1 до 6. По сигналу учителя команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеюший номер 1, предъявляет решение учителю. Если оно верное, игрок № 1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находяшиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следуюшую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находяшиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, то решение предъявляет учителю игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный рубеж. При правильном решении задачи на зачетном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного рубежа переходит на исходный рубеж. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. На исходном и зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной. После того как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задачу начинают решать тогда, когда этот участник там появляется. За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следуюшую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдушую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если:

а) кончилось время;

б) кончились задачи на зачетном рубеже;

в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговариваются.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

Задачи для исходного рубежа

1. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев; а у сестры его вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько всего братьев и сестер?

2. В саду живут куры и кролики. Число голов всех животных равно 50, а число ног — 160. Сколько в саду кур и сколько кроликов?

3. Стали вороны садиться по одной на березу — не хватило одной березы; стали садиться по две — одна береза оказалась лишней. Сколько было ворон и сколько берез?

4. В феврале 2004 года было 5 воскресений. Какого числа было четвертое воскресенье?

5. 4 маляра окрашивают 6 комнат за 5 часов. За какое время 12 маляров окрасят 18 комнат?

6. Учитель предложил решить Саше 6 задач. За каждую нерешенную задачу учитель давал ему 2 дополнительные задачи. В итоге Саше пришлось решать 14 задач. Сколько задач Саше не удалось решить?

7. Три поросенка Наф-Наф, Ниф-Ниф и Нуф-Нуф решили построить дом. Каждый из трех поросят купил по 12 бревен и распилил их на 30 однометровых чурбаков. Длина каждого из купленных бревен была равна либо двум, либо трем, либо четырем метрам. Сколько всего распилов пришлось сделать трем поросятам?

8. Сколько существует двузначных чисел, представимых в виде суммы двух натуральных чисел, каждое из которых кратно 11 или 17?

9. За новогодним столом сидят 20 человек, 16 из них носят имя Саша. В полночь они рассядутся за круглым столом и каждый загадает одно желание. Исполнится же желание лишь у тех, кто будет сидеть между двумя Сашами. Какое наибольшее число желаний может исполниться?

10. Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевезти лишь одного человека. Тем не менее они переправились через реку и продолжили путешествие. Могло ли так быть?

11. Шапокляк в 5 раз тяжелее Чебурашки и на 30 кг легче Гены. Сколько весит Чебурашка, если все трое весят 140 кг?

12. Какова наименьшая сумма пяти различных по достоинству современных российских монет?

13. Сколько существует трехзначных чисел, цифры в которых расположены по возрастанию слева направо?

14. Сколько существует трехзначных чисел, цифры в которых расположены по убыванию слева направо?

15. Частное втрое больше делимого и вдвое больше делителя. Найдите делимое, делитель и частное.

Задачи для зачетного рубежа

16. Из 26 спичек длиной по 5 см сложили прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь?

17. Из пунктов А и Б одновременно навстречу друг другу вышли мальчик и девочка, каждый со своей, но постоянной скоростью, и встретились через час. После этого они, не останавливаясь, пошли дальше и, дойдя до пунктов Б и А, повернули обратно, после чего снова встретились. Сколько времени пройдет между первой их встречей и второй?

18. Записана сумма двух чисел: 68 791 + 245 194. Вычеркните четыре цифры из этой записи так, чтобы получилась наименьшая сумма. При этом из каждого числа надо вычеркнуть хотя бы по одной цифре. Чему равна получившаяся сумма?

19. Сейчас угол между часовой и минутной стрелками настенных часов прямой. Чему может быть равен угол между этими стрелками через полчаса?

20. Найдите все натуральные числа, которые в 7 раз больше своей последней цифры.

21. На отрезке AB, длина которого равна 6 см, отмечены две точки: M и K. Известно, что $BM = 2BK$, $AM = 0{,}8AK$. Найдите длину отрезка MK.

22. Две девочки играют в игру — отрывают лепестки у ромашки. За один ход разрешается отрывать либо один лепесток, либо два лепестка, расположенных рядом друг с другом (между которыми нет оторванных лепестков). Побеждает та девочка, которая оторвала последний лепесток. Кто выиграет при правильной игре?

23. Решите ребус*:

$$\begin{array}{r} \text{У М} \\ +\,\text{Ш У М} \\ \hline \text{В М Ш} \end{array}$$

24. Даны шесть чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Разрешено к любым двум числам прибавлять по единице. Можно ли через несколько ходов сделать все числа равными?

25. Рядом сидят мальчик и девочка.

«Я — мальчик» — говорит черноволосый ребенок.

«Я — девочка» — говорит рыжий ребенок.

Если хотя бы кто-то из них врет, кто мальчик, а кто девочка?

26. В бочке не менее 13 ведер бензина. Можно ли отлить 8 ведер с помощью девятиведерной и пятиведерной бочек?

27. В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают день рождения не менее чем 4 ученика этого класса?

28. Из 4 монет одна тяжелее остальных, имеющих одинаковую массу. Можно ли ее узнать с помощью двух взвешиваний на весах с двумя чашками без гирь?

29. Сколько знаков после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{1\,024\,000}$?

30. В треугольнике один из углов в 2 раза больше второго и на 20° отличается от третьего. Какие значения (в градусах) может принимать наибольший угол такого треугольника?

Ответы и пояснения

1. 4 брата и 3 сестры.

2. 20 кур и 30 кроликов.

3. 4 вороны, 3 березы.

*В условиях маткарусели верным считается хотя бы одно решение ребуса.

4. 22 февраля.

5. За 5 часов.

6. 4 задачи.

7. 54 распила.

8. 31 число: 22, 28, 33, 34, 39, 44, 45, 50, 51, 55, 56, 61, 62, 66, 67, 68, 72, 73, 77, 78, 79, 83, 84, 85, 88, 89, 90, 94, 95, 96, 99.

9. 14.

10. Да, они подошли с разных берегов реки.

11. 10 кг.

12. 166 копеек = 1 рубль 66 копеек.

13. 84. Начинающихся с 1 — 28, с 2 — 21, с 3 — 15, с 14 — 10, с 5 — 6, с 6 — 3, с 7 — 1.

14. 120. Решается аналогично.

15. $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

16. 1050 см^2. Использовать перебор, наибольшая площадь будет у прямоугольника, стороны которого состоят из 6 и 7 спичек.

17. 2 ч.

18. 2865.

19. 105° или 75°.

20. Одно число: 35.

21. 1 см.

22. Побеждает девочка, которая будет отрывать лепестки второй при следующей стратегии. При любом первом ходе первой девочки вторая делает такой ход, который разбивает все оставшиеся лепестки на две симметричные части. Рассмотрим два случая.

Случай 1: число лепестков у ромашки нечетное. Если первая девочка отрывает 1 лепесток, то вторая отрывает 2 лепестка, но так, чтобы оставшиеся разбились на 2 симметричные части. Если первая девочка отрывает 2 лепестка, то вторая отрывает 1 лепесток, но так, чтобы оставшиеся лепестки разбились на симметричные части относительно центра ромашки.

Случай 2: число лепестков у ромашки четное. Если первая девочка отрывает 1 лепесток, то вторая отрывает тоже 1 лепесток, но так, чтобы оставшиеся разбились на 2 симметричные части. Если первая девочка отрывает 2 лепестка, то вторая отрывает тоже 2 лепестка, но так, чтобы оставшиеся лепестки разбились на симметричные части относительно центра ромашки.

Следующие свои ходы вторая девочка делает симметрично ходам первой девочки.

23. $74 + 874 = 948$.

24. Нет, так как сумма 6 чисел первоначально была нечетной, а в случае равенства всех чисел она будет четной.

25. Врут оба. Рыжий ребенок — мальчик, черноволосый ребенок — девочка.

26. Да.

5 ведер	0	0	5	0	4	4	5
9 ведер	0	9	4	4	0	9	8

27. Да, доказывается методом от противного или с помощью обобщенного принципа Дирихле.

28. Да, разбив 4 монеты по 2 и взвешивая монеты каждой пары.

29. 13 знаков.

30. 80° и 84°.

Методический комментарий. Перед началом карусели учитель должен ознакомить школьников с правилами, обсудить их и распределить игроков по командам. После проведения математической карусели нужно подвести итоги, наградить победителей. Следует также разобрать задачи, вызвавшие затруднения на зачетном рубеже. В качестве домашнего задания можно дать задачи, вызвавшие затруднения на исходном рубеже.

Для исходного рубежа подбирались разнообразные задачи с различной сложностью. При этом аналогичные задачи на занятиях кружка не решались. А для зачетного рубежа подбирались задачи, использующие идеи и методы решения, как рассмотренные на занятиях кружка, так и те, которые планировалось рассмотреть на ближайших занятиях.

ЗАНЯТИЕ 14. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ-4 (ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ)

Работа по теме занятия

1. Брату и сестре необходимо было встретить отца, приезжающего на станцию, которая находится в 6 км от их дома. Если бы они пошли пешком, то опоздали бы к прибытию поезда на 10 мин. Оставалась лишь одна возможность — использовать велосипед. Так они и поступили и прибыли на станцию одновременно за 10 мин до прихода поезда. Как они поступили и за сколько минут до прихода поезда они начали движение, если ходьба пешком втрое медленнее езды на велосипеде? Найдите скорость движения на велосипеде.

2. Проехав половину всего пути, пассажир лег спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути пассажир проехал бодрствуюшим?

3. Поросята Ниф-Ниф и Нуф-Нуф убегают от волка к домику Наф-Нафа. Волку бежать до поросят, если бы они стояли на месте, 4 минуты. Поросятам бежать до домика Наф-Нафа 6 минут. Волк бежит в 2 раза быстрее поросят. Успеют ли поросята добежать до домика Наф-Нафа? Ответ обоснуйте.

4. Мне, чтобы дойти до дома от места работы, требуется 10 минут. Моей же собаке Арни, если она сразу побежит домой, — 2 минуты. Но все дело в том, что, как только я скомандую «Домой!», Арни начинает носиться от меня до дома, затем обратно ко мне, потом снова от меня до дома и так до тех пор, пока я не дойду до дома. Я знаю, что расстояние от работы до моего дома равно 800 м. Спрашивается: какое расстояние в сумме пробежит Арни, если, уходя с работы, я ей скомандовал «Домой!»?

5. Из города Котласа в город Коряжму автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч в течение 1 ч. Обратно автомобиль двигался уже со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

6. Два ученика вышли одновременно из одного дома в школу. У первого ученика шаг был на 20% короче, чем у второго, но зато он успевал за одно и то же время делать шагов на 20% больше. Кто из них раньше пришел в школу?

7. По кольцевой дороге курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 12 трамваев. Сколько трамваев надо добавить, чтобы при той же скорости интервалы между ними уменьшились бы на одну пятую?

Повторение

8. Легенда гласит, что в одной давно забытой стране был храм; в этом храме находились статуи трех богов: бога правды, бога лжи и бога дипломатии, которые были расположены в один ряд. Они обладали одним замечательным свойством: отвечали на вопросы верующих. Было известно, что бог правды всегда говорил правду, бог лжи всегда говорил ложь, а бог дипломатии — иногда правду, а иногда ложь. Внешне статуи были совершенно одинаковые, и никто из верующих не знал, кто же бог лжи, бог правды, бог дипломатии. В связи с этим верующим приходилось обращаться к жрецам, чтобы выяснить, что же в ответах богов является правдой. И вот однажды молодой крестьянин по прозвищу Простак пришел в храм с твердым намерением узнать, какая статуя каким богом является. Он смиренно подошел к статуе, которая была расположена от него справа, и спросил ее: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог правды». Тогда он обратился к статуе, крайней слева, и задал тот же вопрос: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог лжи». Тогда он обратился к статуе, стоящей в центре, и спросил: «Кто же ты?» На что та ответила: «Бог дипломатии». «Теперь все ясно», — сказал себе Простак. Он вышел из храма и рассказал людям, какая статуя каким богом является. Спрашивается: каким образом Простак это узнал?

9. Не выполняя деления, докажите, что значение выражения $200\,600 \cdot 1002 + 2006 \cdot 100\,300$ делится на 2005.

Домашнее задание

10. Встретились два математика, A и B. A спросил: «Сколько лет твоим четырем сыновьям?» На что B ответил, что произведение их возрастов равно 36, а сумма равна номеру проезжающего мимо автобуса. Подумав немного, A сказал, что этой информации ему недостаточно. Тогда B добавил: «Да, я забыл сказать, что мой старший сын занимается плаванием», и A назвал возраст детей. Как это ему удалось?

11. Путешественник в первый день прошел 20% всего пути и 2 км. Во второй прошел 50% остатка и еще 1 км. В третий день — 25% оставшегося пути и еще 3 км. Остальные 18 км пути он прошел в четвертый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?

12. Имеется 4 одинаковые по виду монеты. Известно, что среди них 3 монеты настоящие, а одна фальшивая, но неизвестно, какая именно, и неизвестно, легче она остальных или тяжелее. Как с помощью двух взвешиваний на весах с двумя чашками без гирь выявить фальшивую монету?

Одному из учащихся предложить подготовить сообщение об Архимеде к занятию № 16.

Решения и ответы

1. Чтобы прийти одновременно на станцию, надо половину пути каждому ехать на велосипеде и половину пути идти пешком. Обозначим за x мин время движения брата и сестры пешком, которое они затратили бы на 6 км. Тогда время движения пешком половины пути будет $\frac{1}{2}x$ мин, а время движения на велосипеде будет $\frac{1}{2}x : 3$ (мин). Тогда все время движения брата с сестрой на велосипеде и пешком будет равно $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x : 3 = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x\right)$ мин. Так как брат и сестра пришли за 10 мин до прихода поезда, используя велосипед, и опоздали бы на 10 мин, идя пешком, то получим следующее уравнение: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x + 10 = x - 10$. Решением уравнения будет $x = 60$ (мин).

Значит, брат с сестрой вышли до прихода поезда за 50 мин, при этом 30 мин каждый из них шел пешком и 10 мин — ехал на велосипеде. Поэтому скорость движения на велосипеде будет равна $\frac{3}{10}$ км/мин = 18 км/ч.

2. Изобразим путь пассажира отрезками (рис. 38).

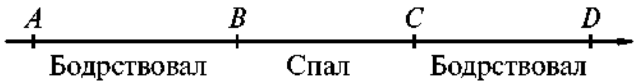


Рис. 38

Обозначим за S отрезок CD, тогда $BC = 2S$ (пока спал), всего $BD = 3S$, но $AB = BD$, значит, $AD = 6S$. Бодрствовал он на отрезках AB и CD:

$$AB + CD = 3S + S = 4S.$$

Пассажир бодрствовал $\frac{4S}{6S} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (пути).

3. Так как волку надо будет потратить $4+6:2=7$ минут, то поросята успеют добежать до домика Наф-Нафа.

4. Собака за одно и то же время пробегает расстояние в 5 раз больше, чем я. При этом неважно, как она бегает. Так как я прошел 800 м, то Арни пробежит в 5 раз больше, то есть 4000 м, или 4 км.

5. 1) $40 : 1 = 40$ (км) — расстояние от Котласа до Коряжмы;

2) $40 : 60 = \frac{2}{3}$ (ч) — время движения на обратном пути;

3) $40 \cdot 2 = 80$ (км) — весь путь;

4) $1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ (ч) — все время;

5) $80 : 1\frac{2}{3} = 48$ (км/ч).

(*Ответ:* средняя скорость равна 48 км/ч.)

6. Обозначим длину шага второго ученика за x м, а число шагов, которое успевал делать второй ученик за некоторое время — за y, тогда длина шага первого ученика будет равна $0{,}8x$ (м). Так как первый делал шагов за некоторое время больше на 20% второго, то он сделает за это же время $1{,}2y$ шагов. Тогда расстояния, пройденные первым и вторым учениками за указанный промежуток времени, будут равны соответственно $0{,}8x \cdot 1{,}2y$ и xy. Так как $0{,}96xy < xy$, то второй ученик пройдет большее расстояние, а значит, он раньше придет в школу.

7. Так как длина интервала обратно пропорциональна числу трамваев, то трамваев должно быть

$$12 : \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 12 : \frac{4}{5} = 12 \cdot \frac{5}{4} = 15.$$

Значит, надо добавить 3 трамвая.

8. Статуя справа, судя по ее ответу, не является богом правды. Предположим, что справа бог лжи. Значит, в центре дипломат, и тогда слева бог правды, но он своим ответом солгал. Противоречие.

Остается последний вариант: справа — бог дипломатии, слева — бог правды, в центре — бог лжи.

9. Вынесем общие множители 100 и 2006. Получим, что исходное выражение равно $2006 \cdot 100 \cdot (1002 + 1003)$, что, очевидно, делится на 2005.

10. Число 36 можно разложить на 4 натуральных сомножителя девятью способами. При этом получаются 8 различных сумм этих сомножителей (проверьте!). Но раз второй математик сказал, что этой информации недостаточно, то это означает, что возможно больше одного варианта решения, то есть $1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$ или $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 36$, — в обоих случаях сумма сомножителей равна 14. После последней подсказки (про старшего сына) становится ясно, что детям первого математика 1, 2, 2 и 9 лет.

11. Если S км — весь путь путешественника, то в первый день он прошел $(0{,}2S + 2)$ км, во второй — $0{,}4S$ км, в третий $(0{,}1S + 2{,}5)$ км, в четвертый — 18 км, поэтому:

$$0{,}2S + 2 + 0{,}4S + 0{,}1S + 2{,}5 + 18 = S.$$

Откуда находим $S = 75$ (км).

12. Взвесим по 1 монете.

1-й случай. Весы в равновесии — фальшивая монета будет среди оставшихся монет. Заменим одну из монет на ту, которую не взвешивали. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета — оставшаяся. Если не в равновесии — то та, которую положили на весы.

2-й случай. Весы не в равновесии — фальшивая монета на весах. Заменим одну из монет на весах на настоящую монету. Весы уравновесились — фальшивая монета — та, которую заменили, не уравновесились — та, которая осталась на весах после первого взвешивания.

ЗАНЯТИЕ 15. ВЗВЕШИВАНИЯ

Работа по теме занятия

1. Имеются чашечные весы без гирь и две монеты, одна из которых фальшивая, причем легче другой. Требуется выявить фальшивую монету.

2. Имеются чашечные весы без гирь и три монеты, одна из которых фальшивая, причем легче других. Требуется выявить фальшивую монету.

3. Имеются четыре одинаковые по виду монеты, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

4. Имеются пять одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

5. Имеются шесть одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

6. Имеются семь одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

7. Имеются восемь одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

8. Имеются девять одинаковых по виду монет, одна из которых фальшивая, легче других. Требуется определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний потребуется?

Повторение

9. Путник шел в гору со скоростью v км/ч, а с горы — $2v$ км/ч. Какова средняя скорость путника, если он поднимался в гору и возвращался в исходный пункт у подножия горы по одной и той же тропинке?

10. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист и мотоциклист. Через 30 минут велосипедисту оставалось проехать 3 км до середины пути. Мотоциклист же через 20 минут после начала движения уже отъехал на 2 км от середины пути. Через какое время после начала движения произошла их встреча?

Работа по теме занятия

11. Из 27 монет одна фальшивая, она легче остальных. Можно ли найти ее за 3 взвешивания?

12. Из четырех внешне одинаковых монет две весят по 10 г, а две другие — по 9 г. Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс грузов, положенных на чашки. Как за одно взвешивание найти хотя бы одну десятиграммовую монету?

13. Какую массу должна иметь каждая из трех гирь для того, чтобы с их помощью можно было бы взвесить любое целое число килограммов от 1 до 10 на чашечных весах (гири можно ставить на обе чашки)? Обоснуйте свой ответ.

Домашнее задание

14. В 4 мешках все монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном все фальшивые (весят по 11 г). Одним взвешиванием на точных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивая монета.

15. В гостинице остановился купец. У него для расплаты за проживание была лишь одна серебряная цепочка, состояшая из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки. Какое звено цепочки надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином? (Хозяин мог давать сдачу звеньями, полученными ранее.)

16. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 15 ч 30 мин?

Решения и ответы

1. Положить по одной монете на каждую чашку весов. Фальшивая монета на той, которая вверху.

2. Положить 2 монеты на чашки весов, если они в равновесии, то фальшивая — оставшаяся; если не в равновесии, то фальшивая — на верхней чашке весов.

3. Делим монеты на две кучки по две монеты, кладем их на весы. Та кучка, которая будет легче, содержит фальшивую монету. Совершив второе взвешивание, определяем фальшивую монету.

Можно взвешивать по одной монете. Если у двух монет равновесие, то среди них фальшивой монеты нет. Тогда взвешиваем оставшиеся две монеты и определяем фальшивую. Если при первом взвешивании не получилось равновесия, то сразу определяем фальшивую монету.

Итак, минимальное число взвешиваний — 2 (хотя если повезет, то можно определить фальшивую монету и за одно взвешивание).

4. Взвешиваем по 2 монеты. Если весы в равновесии, то оставшаяся монета фальшивая. Если весы не в равновесии, то в той паре, которая легче, определяем фальшивую монету. Потребуются два взвешивания.

5. Взвешиваем по 3 монеты. Выбираем более легкую кучку. Далее поступаем так, как в задаче № 2. Всего достаточно 2 взвешиваний.

6. Можно отложить в сторону одну из монет и взвесить по 3 монеты. Если весы в равновесии, то фальшивая монета — оставшаяся; если не в равновесии, то, определив более легкую кучку, берем из нее 2 монеты и взвешиваем их. Если весы снова в равновесии, то оставшаяся монета фальшивая. Если весы не в равновесии, то на чашке, которая поднимется вверх, будет фальшивая монета. Можно поступить иначе. Делим 7 монет на 2 кучки: по 4 и 3 монеты. Вначале работаем с четырьмя монетами: взвешиваем две и две монеты. Если весы уравновесились, то фальшивая среди 3 оставшихся монет. Ее определяем способом, описанным в задаче № 2. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета на чашке весов, которая поднялась вверх. Определяем ее следующим взвешиванием. Итак, понадобилось всего два взвешивания.

7. Разделим монеты на кучки по 4 монеты или на кучки по 2, 3 и 3 монеты.

1-й способ. При первом взвешивании определяем более легкую кучку из 4 монет, затем поступаем так, как в задаче № 3 (всего 3 взвешивания).

2-й способ. Сначала взвешиваем по 3 монеты. Если весы уравновесились, то фальшивая монета находится среди оставшихся двух. Ее определяем вторым взвешиванием. Если весы не уравновесились, то фальщивая монета среди трех монет, находящихся на чашке весов, которая поднялась вверх. Ее определяем вторым взвешиванием (задача № 2). Значит, можно определить фальщивую монету за 2 взвещивания.

8. Разделим монеты на кучки по 3 монеты и первым взвешиванием определим кучку, в которой фальшивая монета. Затем вторым взвешиванием определяем среди этих трех монет фальшивую.

9. Обозначим за s км расстояние, пройденное путником в одном направлении, тогда $\frac{s}{v}$ ч — время, затраченное на подъем, а $\frac{s}{2v}$ ч — время, затраченное путником на спуск. Тогда время, затраченное на подъем и спуск, будет равно $\frac{s}{v} + \frac{s}{2v}$ (ч), а пройденное расстояние — $2s$ км. Тогда средняя скорость путника будет равна

$$2s : \left(\frac{s}{v} + \frac{s}{2v}\right) = \frac{4v}{3} \text{ (км/ч)}.$$

10. Обозначим скорости велосипедиста и мотоциклиста за x и y, найдем пройденные расстояния за 30 и 20 мин: $0{,}5x$ и y. Учитывая, что за 30 мин велосипедист не доехал до середины 3 км, найдем расстояние

$AB = 2(0{,}5x+3)$. Рассуждая аналогично про мотоциклиста, найдем снова $AB = 2\left(\frac{1}{3}y - 2\right)$. Приравнивая правые части в этих двух равенствах, находим, что $x = \frac{2}{3}y - 10$. Так как время встречи будет равно отношению AB к сумме скоростей велосипедиста и мотоциклиста, то найдем это отношение:

$$\frac{x+6}{x+y} = \frac{\frac{2}{3}y - 4}{\frac{2}{3}y - 10 + y} = \frac{2(y-6)}{5(y-6)},$$

которое будет равно $\frac{2}{5}$ ч = 24 мин.

11. Разделим монеты на кучки по 9 монет и первым взвешиванием определим кучку, в которой фальшивая монета. Затем аналогично разделим 9 монет на три кучки и вторым взвешиванием определим кучку из 3 монет, в которой будет находиться фальшивая монета. Третьим взвешиванием определим из этих трех монет фальшивую.

12. Положим на левую чашку весов две монеты, а на правую — одну. Возможны четыре случая, показанные в таблице.

Слева	Справа	Оставшаяся монета	Показания стрелки
<u>10 + 10</u>	9	9	11
10 + 9	9	<u>10</u>	10
10 + 9	<u>10</u>	9	9
9 + 9	<u>10</u>	<u>10</u>	8

Таким образом, по показанию стрелки мы можем однозначно определить, с каким из четырех возможных случаев мы имеем дело. Осталось заметить, что в каждом из этих случаев нужная монета без труда находится (подчеркнуто в таблице).

13. Например, гири массой 1, 3 и 6 кг. Действительно:

$$10 = 6+3+1,\quad 9 = 6+3,\quad 8 = 6+3-1,\quad 7 = 6+1,$$
$$6 = 6,\quad 5 = 6-1,\quad 4 = 3+1,\quad 3 = 3,\quad 2 = 3-1,\quad 1 = 1.$$

Есть и другое решение: 1, 2 и 7 кг.

$$10 = 7 + 2 + 1,\quad 9 = 7 + 2,\quad 8 = 7 + 1,\quad 7 = 7,\quad 6 = 7 - 1,$$
$$5 = 7 - 2,\quad 4 = 7 - 1 - 2,\quad 3 = 2 + 1,\quad 2 = 2,\quad 1 = 1.$$

14. Пронумеруем мешки числами от 1 до 5. Возьмем из каждого мешка количество монет, равное его номеру. Если все монеты настоящие, то они весили бы $10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$ (г). Но так как в одном мешке монеты фальшивые, значит, масса будет отличаться на столько граммов, сколько монет взяли из данного мешка, а значит, номер мешка совпадет с разницей в массе монет. То есть номер мешка с фальшивыми монетами будет совпадать с последней цифрой массы монет. Например, если получилось 152 г, то фальшивые монеты будут во 2-м мешке.

15. Отсоединить третье звено. Тогда цепочка распадется на три части: 1, 2 и 4 звена. В первый день купец отдаст 1 звено, во второй — 2 звена (обратно получит 1 звено), в третий отдаст вновь 1 звено, в четвертый отдаст 4 звена (обратно получит 1 и 2 звена), в пятый отдаст 1 звено, в шестой отдаст 2 звена (обратно получит 1 звено), в седьмой день отдаст 1 звено.

16. В 15.00 стрелки образовывали прямой угол. За 30 мин минутная стрелка повернулась на 180°, а часовая — на 15°. Тогда угол между ними будет равен $180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Методический комментарий. Первые 9 задач были предложены с целью диагностики математических способностей учащихся. Задачи предлагались все однотипные, но увеличивалось число монет. В задачах № 11–14 уже рассматривались и другие случаи.

ЗАНЯТИЕ 16. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ-2

Работа по теме занятия

1. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки составляют прямой угол?

2. Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч 38 мин.

3. Листок календаря частично закрыт предыдущим листком (рис. 39). Какая его часть больше: закрытая или открытая?

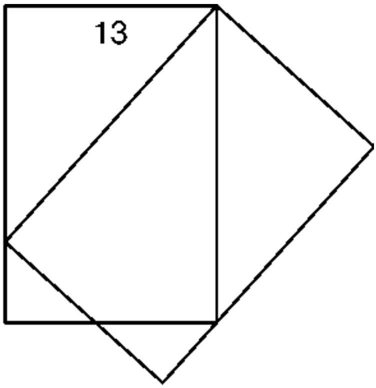


Рис. 39

4. Как с помошью циркуля и линейки разделить угол величиной 19° на 19 равных частей? Найдите несколько способов.

5. У Коли есть фанерный прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см и карандаш. Разрешается прикладывать прямоугольник к бумаге и обводить его (полностью или частично) карандащом. Любые другие действия (например, делать пометки на фанере) запрещены. Как Коле, не нарущая запрета, нарисовать квадрат со стороной 1 см? Опищите, что он должен делать и в каком порядке.

6. Нарисуйте на плоскости три одинаковых квадрата таким образом, чтобы получились семь квадратов.

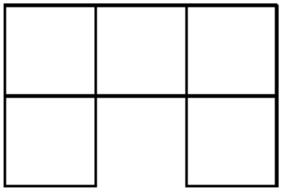


Рис. 40

7. Замостите плоскость скобками (рис. 40).

8. Используя тетрадный лист бумаги, с помощью нескольких перегибаний постарайтесь получить ромб. При этом некоторые части листа могут накладываться одна на другую.

Устные упражнения

9. Сколько ударов в сутки делают часы с боем?

10. В одной сказке хозяин, нанимая работника, предложил ему следующее испытание:

— Вот тебе бочка, наполни ее водой ровно наполовину, ни больше, ни меньше. Но смотри, палкой, веревкой или чем-либо другим для измерения не пользуйся.

Работник справился с заданием. Как он это сделал?

11. *Быстрое возведение в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5:* надо цифру десятков умножить на ближайшее к этой цифре большее целое число и к произведению приписать справа 25. Почему?

Доклад ученика об Архимеде (примерное содержание доклада)

Архимед родился в III в. до н.э. в семье астронома Фидия. Отец и стал первым учителем Архимеда.

Молодость Архимеда прошла в родном городе Сиракузы на средиземноморском острове Сицилия. Став известным ученым, Архимед некоторое время жил также в Александрии — тогдашней столице наук. Там он познакомился с другими крупнейшими математиками того времени (Евклид, Эратосфен и др.).

III в. до н.э. был не только золотым веком античной математики, но и веком войн. Когда римские войска осадили Сиракузы, то защитные сооружения, сконструированные Архимедом, не позволили штурмом взять этот город. Во время одной из атак римлян в 212 г. до н.э. Архимед погиб. Но и после его гибели Сиракузы продолжали успешно обороняться, используя изобретения ученого.

Наряду с успехами Архимеда в военном деле как инженера достижения его в математике не менее значительны. Рассмотрим некоторые из них.

1. Архимед поставил точку в долгом споре математиков по поводу того, есть ли бесконечно большие и бесконечно малые числа. Сформулированный им принцип: «Всякое малое число, будучи сложено само с собой достаточное количество раз, превзойдет всякое наперед заданное число» — получил название аксиомы Архимеда.

2. Архимед установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых», то есть он приближенно вычислил число π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

3. Архимед является автором многих изобретений и открытий. В частности, известен описанный Архимедом прибор для определения видимого диаметра Солнца, который можно считать первой измерительной установкой. По преданию, Архимед сжег римский флот близ Сиракуз с помощью «зажигательных вогнутых зеркал».

4. В сохранившихся письмах к одному из александрийских математиков Архимед предвосхищает идеи интегрального и дифференциального исчислений, с основами которых знакомятся в школе в 10–11 классах.

Повторение

12. На какую наибольшую степень числа 7 делится число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot 2012?$$

13. Три прыжка волка равны 5 прыжкам лисы. Но за то время, когда волк делает 4 прыжка, лиса делает 7 прыжков. Кто из них бежит быстрее?

14. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Домашнее задание

15. Дан угол в 13°. Как получить угол в 11°?

16. В вершинах куба расставили числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. На каждой грани записали сумму чисел в ее вершинах. Могут ли на гранях получиться шесть последовательных натуральных чисел?

17. Двое друзей, Иван и Николай, живут в одной деревне, недалеко друг от друга. Дома у каждого из них есть настенные часы. Однажды Иван забыл завести свои часы, и они остановились. «Пойду-ка я в гости к Николаю, заодно и посмотрю, который час», — решил Иван. Отправившись в гости и просидев у Николая некоторое время, Иван вернулся домой и верно поставил свои часы. Смогли бы вы сделать так же?

Решения и ответы

1. В течение суток минутная стрелка делает 24 оборота, а часовая — 2 оборота, следовательно, минутная стрелка совершает 22 оборота вокруг часовой, составляя при этом с часовой стрелкой дважды прямой угол (отставая на четверть круга и обгоняя на четверть круга). Таким образом, прямой угол между стрелками образуется за сутки 44 раза.

2. За 1 ч минутная стрелка проходит полный круг (360°), а часовая — в 12 раз меньше, то есть 30°. Значит, в 7 ч 00 мин минутная стрелка будет отставать от часовой стрелки на 210°. Через 38 мин минутная стрелка повернется на угол $\frac{38}{60}\cdot 360° = 228°$, а часовая — на угол в 12 раз меньший, то есть на 19°. Тогда в 7 ч 38 мин угол между ними будет $210°+19°-228° = 1°$.

Ответ: 1°.

3. Больше будет закрытая часть, так как (рис. 41) $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$.

4. Рассмотрим возможные способы решения.

1-й способ. Построим окружность с центром в вершине угла, отложим на ней 19 раз угол 19°. В результате получим угол в $1° = 19°\cdot 19 - 360°$. С помощью этого угла делим данный угол на 19 частей.

2-й способ. Отложим 5 раз угол 19°, в итоге получим угол 95°. Построим прямой угол и найдем разность 95° и 90°, равную 5°. От одной из сторон угла 19° отложим 4 раза угол 5°, тогда

$$1^\circ = 5^\circ \cdot 4 - 19^\circ.$$

Далее поступаем так же, как в 1-м способе.

3-й способ. Отложим два раза угол 19°, получим угол 38°. С помощью циркуля и линейки построим угол 30° (семиклассники знают способ построения) и найдем $8^\circ = 38^\circ - 30^\circ$. Затем последовательным делением пополам угла в 8° получим углы в 4°, 2° и 1°. Далее поступаем аналогично способу 1.

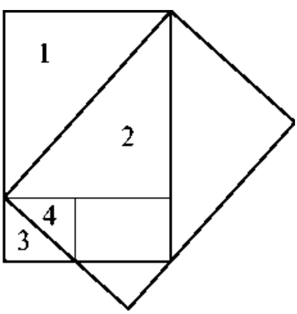


Рис. 41

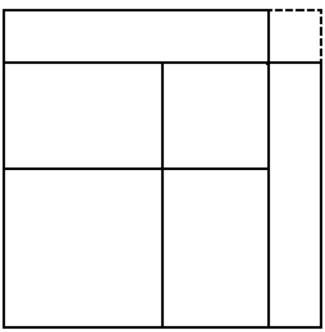


Рис. 42

5. Четырежды приложив шаблон, нарисуем прямоугольники размером 5×6 и 6×5, расположенные, как показано на рис. 42. Осталось, пользуясь стороной фанерного прямоугольника, как линейкой, продолжить их стороны, чтобы в правом верхнем углу образовался квадрат со стороной 1.

6. На рис. 43–45 предложено несколько вариантов решения.

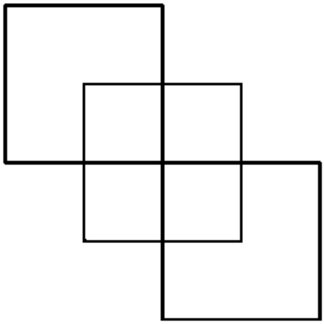


Рис. 43

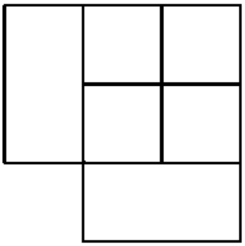


Рис. 44

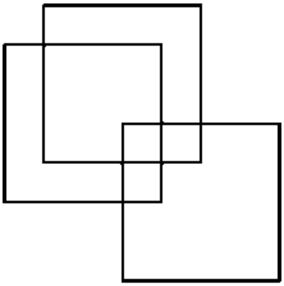


Рис. 45

7. Решение на рис. 46.

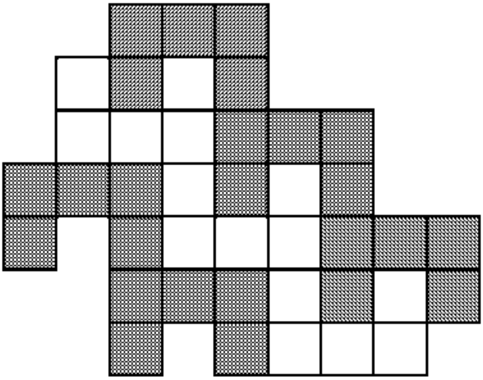


Рис. 46

8. *1-й способ.* Согнуть дважды лист посередине, затем по линиям AB, BC, CD, DA. Тогда $ABCD$ — ромб (рис. 47).

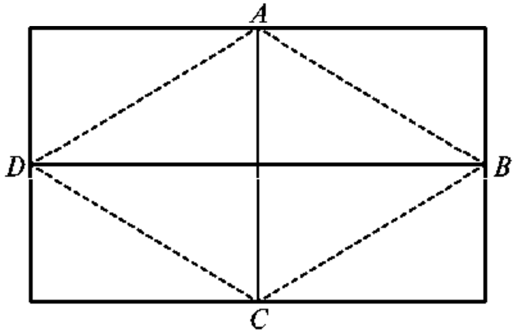


Рис. 47

2-й способ. Согнуть лист по диагонали, затем выступающие концы загнуть еще раз. Развернуть лист. Получается ромб. Порядок действий виден из рис. 48.

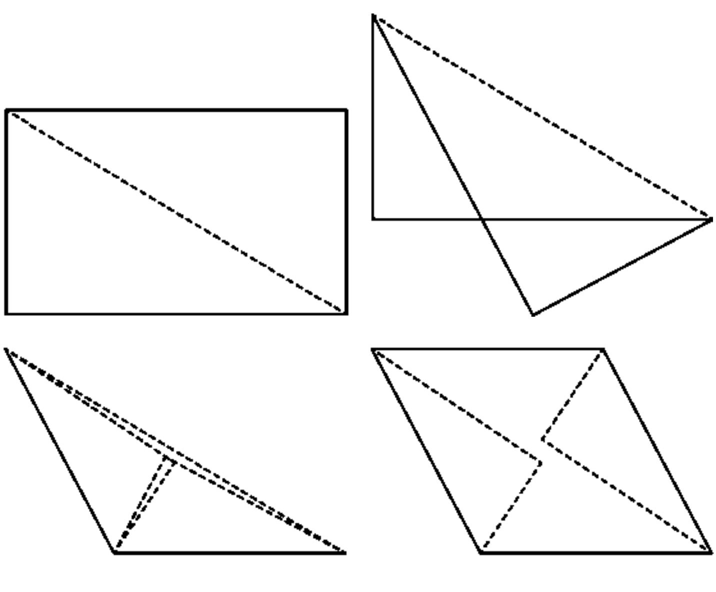


Рис. 48

9. Часы бьют от 1 до 12 ударов 2 раза в сутки, поэтому ответом будет $2\cdot(1+2+3+\ldots+12)=2\cdot13\cdot6=156$ (ударов).

10. Работник налил в бочку больше половины на глаз, а потом потихоньку выливал воду до тех пор, пока уровень воды не коснулся дна (рис. 49).

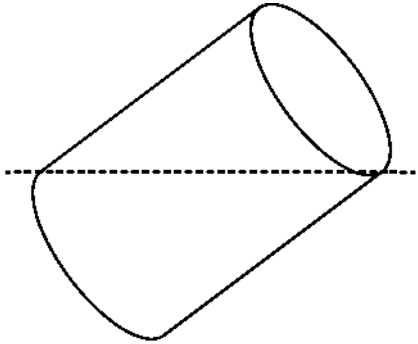


Рис. 49

11. *Обоснование:*

$$(10a+5)^2=100a^2+2\cdot10a\cdot5+25=100a^2+100a+25=$$
$$=100a(a+1)+25=a\cdot(a+1)\cdot100+25.$$

12. Посчитаем число семерок в разложении произведения $1\cdot2\cdot\ldots\cdot2012$ на множители:

$$2012=7\cdot\underline{287}+3;$$
$$2012=49\cdot\underline{41}+3;$$
$$2012=343\cdot\underline{5}+297.$$

Значит, в произведении будет $287+41+5=333$ (семерки). Поэтому данное произведение делится на 7^{333}.

13. Пусть лиса сделает $3\cdot7=21$ (прыжок). По условию задачи волк за это время сделает $3\cdot4=12$ (прыжков). Но 3 прыжка волка равны 5 прыжкам лисы. Значит, 12 волчьих прыжков — это $5\cdot4=20$ лисьих. Получается, что, пока лиса пробегает путь, равный 21 своему прыжку, волк пробежит путь длиной 20 лисьих прыжков. Значит, лиса бежит быстрее.

14. Все числа по модулю равны 1. Так как их произведение равно 1, то множителей (-1) четное число, а 0 в сумме получается, если чисел (-1) и 1 одинаковое количество, то есть по 11. Поэтому 0 не получается.

15. Один из возможных вариантов: отложить 13 раз угол по 13°, тогда разность развернутого угла и угла в 169° даст искомый угол:

$$180^\circ - 13 \cdot 13^\circ = 11^\circ.$$

16. Найдем сумму чисел на всех гранях. Так как каждая вершина принадлежит трем граням куба, то каждое из восьми чисел в общей сумме утроится. Тогда сумма чисел, записанных на шести гранях, будет равна

$$3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 108.$$

А число 108 четное. Среди шести последовательных натуральных чисел три будут четными, а три — нечетными. Поэтому их сумма будет нечетной. Значит, шесть последовательных натуральных чисел на гранях куба получиться не могут.

17. Возможный вариант рассуждения Ивана. Он завел часы дома и посмотрел, сколько было времени по его часам перед уходом. Пусть это будет a. Придя к Николаю, Иван посмотрел на его часы, пусть это будет b. Посидев некоторое время, Иван заметил время, когда он ушел из гостей. Пусть это будет c. Придя домой, Иван посмотрел на свои часы, пусть они показывали d. Тогда $d - a$ будет время, которое Иван отсутствовал дома. А $c - b$ покажет время, которое Иван был в гостях. Тогда $(d - a) - (c - b)$ будет время, которое затрачено Иваном на путь к дому Николая и обратно. Половина этого времени будет потрачена на обратную дорогу. Тогда точное время при возвращении Ивана домой можно найти так:

$$\frac{d - a - c + b}{2} + c = \frac{b + c + d - a}{2}.$$

Методический комментарий. Для решения задачи № 8 (в 5–7 кл.), возможно, придется ввести определение ромба. Обоснования того, что полученная фигура действительно ромб, можно от учащихся не требовать.

ЗАНЯТИЕ 17. ИТОГОВОЕ (УСТНАЯ ОЛИМПИАДА)

Правила устной олимпиады

Учащимся предлагают для решения по несколько задач на первом и втором этапах. Продолжительность этапа оговаривается, например, 30–40 мин. Учащийся, решив задачу, поднимает руку. К нему подходит учитель или помощник из старшеклассников. Ученик устно рассказывает решение задачи, при этом имеет право показывать свои записи в тетради. В случае верного решения задачи учитель в соответствующей графе таблицы ставит знак «+». Если задача решена неправильно, то ставит «–». Учащийся имеет право на 3 попытки объяснений одной задачи. Если все три попытки решить задачу не привели к успеху, то данную задачу ученик больше не объясняет. Решив оговоренное число задач (2 или 3) на первом этапе, ученик переходит на второй этап, на котором ему предлагают еще несколько задач. Решив какую-то из задач 2-го этапа или оставщиеся задачи первого этапа, ученик вновь поднимает руку и объясняет решение.

Побеждает ученик, решивщий за указанное время наибольшее число задач. Если несколько учащихся рещат одинаковое число задач, победителем объявляется тот, кто сделал менее всего попыток.

Проведение олимпиады

Первый этап

1. Имеются два сосуда вместимостью 5 и 7 л. Как с помощью таких сосудов налить 6 л?

2. Учашиеся школы рещили организовать инструментальный ансамбль. Михаил играет на саксофоне. Пианист учится в 9 классе. Ударника зовут не Валерием, а ученика 10 класса зовут не Леонидом. Михаил учится не в 11 классе. Андрей не пианист и не ученик 8 класса. Валерий учится не в 9 классе, а ударник — не в 11. Леонид играет не на контрабасе. На каком инструменте играет Валерий и в каком классе он учится?

3. Имеются 4 пакета разной массы и весы с 2 чашками без гирь. С помощью 5 взвешиваний расположите пакеты по массе.

4. Найдите значение дроби: $\dfrac{382 + 498 \cdot 381}{382 \cdot 498 - 116}$.

Второй этап

5. На столе стоит ваза, в которой 11 конфет. Двое по очереди берут по одной, две или три конфеты. Проиграет тот, кому досталась последняя конфета. Кто выиграет при правильной стратегии, если начинает первый?

6. Дан угол в 37°. Постройте циркулем угол в 3°.

7. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу вышли 2 пешехода и встретились на расстоянии 300 м от A. Первый дошел до B, а второй — до A, оба повернули обратно и встретились на расстоянии 400 м от B. Найдите длину AB.

8. В школьной математической олимпиаде участвуют 9 учеников 6 класса. За каждую решенную задачу ученик получает 2 зачетных очка, а за каждую нерешенную или решенную неправильно получает -1 зачетное очко (или одно штрафное очко). Всего для решения было предложено 10 задач. Докажите, что среди участников олимпиады найдутся по крайней мере 2 ученика, набравших одинаковое число очков. (Считается, что ученик, у которого штрафных очков больше, чем зачетных, набрал 0 очков.)

9. Сравните 9997^{10} и $100\,003^8$.

Подведение итогов олимпиады и занятий кружка

1. Подводят итоги устной олимпиады, победителей награждают призами. Производится разбор задач, вызвавщих затруднение.

2. Учащиеся знакомятся с одной из книг по математике, например с книгой И. Ф. Шарыгина «Уроки дедушки Гаврилы, или Развивающие каникулы», в которой рассказывается о летних приключениях мальчика

в деревне у дедушки. В сюжетную линию вплетены занимательные задачи различной степени трудности. В качестве примера приведем фрагмент из книги.

«На радостях был устроен праздничный обед, в котором приняли участие все шестеро. В конце обеда появился арбуз.

— Ну что ж, — сказал дедушка, — придется для ровного счета предложить еще одну задачу.

— Для какого ровного счета? — удивился Федя. — Ведь у нас набралось как раз 200 задач. Куда уж ровнее!

— Ошибаешься. Как раз одной и не хватает. Для ровного счета. А число 200 круглое. Круглыми бывают только дураки и отличники.

10*. Сейчас я разрежу этот арбуз на 5 частей. По числу едоков. Клава не любит арбузы. Потом каждый съест свою часть. Никто не будет ни ломать, ни резать арбузную корку. Но после того как арбуз будет съеден, останутся 6 корок. Как я это сделаю?

Отец Юрий догадался быстро. Федя же был так возбужден, что просто *не мог думать.* Точнее, он не мог думать о предложенной дедушкой задаче. К сожалению или к счастью, такое может случиться с любым человеком, и даже с самым выдающимся математиком. Хотя, конечно, совсем *не думать ни о чем* намного труднее, чем *не делать совсем ничего.* А большинство людей думают, что, когда человек только думает, он как раз и не делает ничего. Вот если он вбивает гвозди, то он что-то делает.

Дедушка быстро разрезал арбуз. Одна часть была явно лучше других. Предложение мамы отдать эту часть Федору было с возмущением отвергнуто всеми мужчинами, включая Навуходоносора и Федора. Федор же просто обиделся. Этот кусок получила мама.

Потом настала пора прощаться.

Дедушка измерил длину волос Федора. Они выросли на целых пять сантиметров.

— Смотри, как сильно подросли твои волосы. Это означает, что ты хорошо *потрудился головой.* Ты ведь

*Эта задача имеет номер 201 в цитируемой книге.

знаешь, что все люди, кому приходится *работать головой*, либо очень волосатые, либо лысые, но по этой же причине. Волосы начинают слишком быстро расти и оттого выпадают. Можешь, кстати, подсчитать, с какой скоростью росли твои волосы. Пусть это будет последней задачей. Вне счета.

Прощаясь с дедушкой, Федор сказал:

— Ты знаешь, дедушка, мне было *страшно* интересно. В том году мы отдыхали на море. Там тоже было страшно *интересно*. Но у тебя страшнее».

3. Также рассматриваются перспективы работы кружка в следуюшем учебном году.

Решения и ответы

Первый этап

1. 6 л можно получить только в 7-литровом сосуде, для этого достаточно получить 4 л в 5-литровом сосуде и из 7-литрового отлить 1 л или получить в 7-литровом сосуде 1 л и долить туда 5 л. Оба варианта рассмотрены ниже.

5 л	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5
7 л	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6

5 л	5	0	5	3	3	0	5	1	1	0	5	0
7 л	0	5	5	7	0	3	3	7	0	1	1	6

2. Для решения задачи составим 2 таблицы, используя все факты, кроме того, что пианист учится в 9 классе и ударник учится не в 11 классе.

	Саксофон	Ударные	Пианино	Контрабас
Михаил	+	–	–	–
Валерий	–	–		
Андрей	–		–	
Леонид	–			–

	8	9	10	11
Михаил				–
Валерий		–		
Андрей	–			
Леонид			–	

Из данных первой таблицы сразу узнать сложно, на чем играет Валерий: есть 2 варианта — на пианино или контрабасе. Пусть Валерий — пианист, тогда он должен учиться в 9 классе, но мы знаем, что Валерий не учится в 9 классе. Поэтому Валерий играет на контрабасе. Заполним первую таблицу, используя этот факт.

	Саксофон	Ударные	Пианино	Контрабас
Михаил	+	–	–	–
Валерий	–	–	–	+
Андрей	–	+	–	–
Леонид	–	–	+	–

Получаем, что пианист — Леонид, а ударник — Андрей. Учитывая это, заполним вторую таблицу.

	8	9	10	11
Михаил		–		–
Валерий		–		
Андрей	–	–		–
Леонид	–	+	–	–

Теперь получаем, что в 11 классе учится Валерий. Таким образом, Валерий играет на контрабасе и учится в 11 классе.

3. Сначала пронумеруем пакеты. Потом взвесим пакеты 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Таким образом, эти 3 пакета за 3 взвешивания расположили по массе. Теперь взвесим четвертый и средний пакеты. Наконец взвесим четвертый и самый легкий (или самый тяжелый) пакеты.

4. Преобразовывая знаменатель, получим:

$$\frac{382+498\cdot 381}{382\cdot 498-116}=\frac{382+498\cdot 381}{(381+1)\cdot 498-116}=$$

$$=\frac{382+498\cdot 381}{381\cdot 498+498-116}=\frac{382+498\cdot 381}{381\cdot 498+382}=1.$$

Второй этап

5. Разложим конфеты на кучки: * **** **** **. Для выигрыша начинающему надо взять сначала 2 конфеты, а затем число, которое вместе с числом конфет, взятым соперником, дает в сумме 4.

6. Задачу можно решить многими способами. Приведем вариант без использования построения углов 30°, 45°, 60°:

$$10 \cdot 37^\circ - 360^\circ = 10^\circ,$$
$$10^\circ \cdot 3 = 30^\circ,$$
$$37^\circ - 30^\circ = 7^\circ,$$
$$10^\circ - 7^\circ = 3^\circ.$$

7. До первой встречи пешеходы прошли пути, сумма которых равна $AB = s$, а в промежутке между первой и второй встречей — пути, сумма которых равна $2s$. Поэтому промежуток времени между их встречами будет также в 2 раза больше промежутка времени до первой встречи. Следовательно, путь, пройденный пешеходом из A между встречами $(s - 300 + 400)$ м, будет в 2 раза больше пути, пройденного им до первой встречи (300 м), а значит, имеем уравнение:

$$s - 300 + 400 = 2 \cdot 300,$$

откуда $s = 500$ м.

8. Учащихся всего — 9, а число различных вариантов набранных очков — 8: набрано 20 очков (решены все 10 задач), 17 (решены 9 задач), 14 (решены 8 задач), 11 (решены 7 задач), 8 (решены 6 задач), 5 (решены 5 задач), 2 (решены 4 задачи), 0 (решено меньше 4 задач). Тогда, приняв учашихся за «зайцев», варианты набранных очков — за «клетки» и учитывая, что $9 > 8$, по принципу Дирихле получим, что по крайней мере 2 ученика будут иметь одинаковое число очков.

9. $9997^{10} < 10\,000^{10} = (10^4)^{10} = 10^{40} = (10^5)^8 = 100\,000^8 < 100\,003^8$.

10. Одно из возможных решений приведено на рис. 50, на котором изображен вид сверху. Линии —

следы разрезов. Один кусок — центральный — напоминает призму. У него две корки. По-видимому, этот кусок и является лучшим, поэтому его отдали маме.

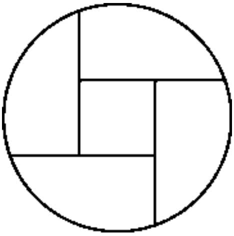


Рис. 50

Методический комментарий. Продолжительность первого этапа — 30–40 мин, второго — 30–50 мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гордон В. О.* Методы решения олимпиадных задач. Основы теории сравнений. Классические неравенства. Чита: Поиск, 1998.
2. *Екимова М. А., Кукин Г. П.* Задачи на разрезание. М.: МЦНМО, 2002.
3. *Зайкин М. И.* Математический тренинг: Развиваем комбинационные способности: Кн. для учащихся 4–7 классов общеобразовательных учреждений. М.: Владос, 1996.
4. *Иванов О. А.* Сто олимпиадных задач для старшеклассников. СПб.: Изд-во СПУ, 1994.
5. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки. М.: Наука, 1979.
6. *Каннель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О. Бугаенко. М.: МЦНМО, 2009.
7. *Кордемский Б. А.* Очерки о математических задачах на смекалку. М.: Госучпедгиз, 1958.
8. *Лоповок Л. М.* Математика на досуге: Кн. для учащихся ср. школьного возраста. М.: Просвещение, 1981.
9. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1. М.: Просвещение, 2008.
10. Математические олимпиады школьников ДАССР. Махачкала: Дагучпедгиз, 1987.
11. *Мерлин А. В., Мерлина Н. И.* Задачи для внеклассной работы по математике (5–11 классы): Уч. пособие. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2002.
12. Методические рекомендации к спецкурсу «Решение олимпиадных задач по математике». Магнитогорск, 2000.
13. Московские математические олимпиады 60 лет спустя / Под ред. Ю. С. Ильяшенко, В. М. Тихомирова. М.: Бюро Квантум, 1995.
14. Новгородские олимпиады школьников по математике. Великий Новгород, 2001.
15. Олимпиадные задачи по математике: инварианты, раскраска, полуинварианты. Якутск, 2001.
16. *Пойа Д.* Как решать задачу: Пособие для учителей / Пер. с нем. М.: Учпедгиз, 1963.

17. *Пчелинцев Ф.А., Чулков П.В.* Математика. 5–6 классы. Уроки математического мышления с решениями и ответами. М.: Издат-школа, 2000.
18. *Рубанов И.С.* Задачи, решения, методические рекомендации. Киров, 1994–2002.
19. *Руденко В.Н., Бахурин Г.А., Захарова Г.А.* Занятия математического кружка в 5 классе. М.: Издательский дом «Искатель», 1999.
20. *Русанов В.Н.* Сборник задач математических олимпиад младших школьников. Оса: Росстани-на-Каме, 1995.
21. *Рыжик В.И.* 25 000 уроков математики: Кн. для учителя. М.: Просвешение, 1993.
22. *Саранцев Г.И.* Упражнения в обучении математике. М.: Просвешение, 1995.
23. Седьмой турнир юных математиков Чувашии: 5–11 классы. Чебоксары, 2003.
24. *Смыкалова Е.В.* Дополнительные главы по математике для учашихся 6 класса. СПб.: СМИО Пресс, 2001.
25. *Спивак А.В.* Математический кружок. 6–7 классы. М.: Посев, 2003.
26. *Спивак А.В.* Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учашихся 5–7 классов. М.: Просвешение, 2002.
27. *Фарков А.В.* Математические олимпиады: Уч.-метод. пособие. М.: Владос, 2004.
28. *Фарков А.В.* Математические олимпиады в школе. 5–11 классы. М.: Айрис, 2011.
29. *Фарков А.В.* Олимпиадные задачи по математике и методы их решения. М.: Народное образование, 2003.
30. *Фарков А.В.* Элементарная математика. Решение школьных олимпиадных задач: Учебное пособие. Архангельск: Поморский университет, 2006.
31. *Фридман Л.М., Турецкий Л.М.* Как научиться решать задачи: Кн. для учашихся. М.: Просвешение, 1989.
32. *Чулков П.В.* Математика. Школьные олимпиады: Метод. пособие. 5–6 кл. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2007.
33. *Шарыгин И.Ф.* Уроки дедушки Гаврилы, или Развиваюшие каникулы. М.: Дрофа, 2003.
34. *Шейнина О.С., Соловьева Г.М.* Математика. Занятия математического кружка. 5–6 кл. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ТЕКСТЫ МУНИЦИПАЛЬНЫХ ОЛИМПИАД ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1 (5 класс)

1. Вычислите: $\dfrac{2004 - 2003 + 2002 - 2001 + \ldots + 2 - 1}{2004 \cdot 45 + 55 \cdot 2004}$.

2. Для нумерации книги для детей понадобились 204 цифры. Сколько страниц в книге, если нумерация начинается с первой страницы?

3. Разрежьте квадрат размером 4×4 на 4 равные фигуры. Разрезать можно лишь по стороне квадрата 1×1, и способы считаются разными, если полученные фигуры не будут равными при каждом способе.

4. В квартирах № 1, 2, 3 жили три котенка: белый, черный и рыжий. В квартирах № 1 и 2 жил не черный котенок. Белый котенок жил не в квартире № 1. В какой квартире жил каждый котенок?

5. Папа купил на праздник своим детям коробку конфет. Федя взял половину конфет и половинку одной конфеты, Аня взяла половину остатка и еще полконфеты. Коля взял половину нового остатка и еще полконфеты. Маша взяла половину оставшихся конфет и еще полконфеты. После этого в коробке осталась одна конфета. Сколько конфет было в коробке?

6. Когда у рыбака спросили, как велика пойманная им щука, он сказал: «Я думаю, что хвост ее — 1 кг, голова — столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Сколько весит щука?

Вариант 2 (6 класс)

1. Запишите подряд 22 пятерки: 5555...5. Поставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий так, чтобы в результате получилось число 2004.

2. Восстановите пропущенные цифры в примере:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} *0*3 \\ *** \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 2**** \\ ***6 \end{array} \\ \hline 621**1 \end{array}$$

3. Разрежьте квадрат размером 4×4 на 4 равные фигуры. Резать можно только по сторонам клеточек. Найдите как можно больше способов.

4. Мама купила яблоки и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришел Андрей, взял треть яблок и ушел. Вторым пришел Борис, взял треть оставшихся яблок и ушел. Затем вернулась из школы Валя, она взяла 4 яблока — треть от числа яблок, которые увидела. Сколько яблок купила мама?

5. В пакете 9 кг крупы. Как при помоши чашечных весов и одной 200-граммовой гири отвесить 2 кг крупы, если разрешается сделать только три взвешивания?

6. В древней рукописи приведено описание города, расположенного на 8 островах. Острова соединены между собой и с материком мостами. На материк выходят 5 мостов; на 4 островах берут начало по 4 моста, на 3 островах берут начало по 3 моста, и на один остров можно пройти только по одному мосту. Возможно ли такое расположение мостов?

Вариант 3 (7 класс)

1. Вычислите: $3\frac{1}{117} \cdot 4\frac{1}{119} - 1\frac{116}{117} \cdot 5\frac{118}{119} - \frac{5}{119}$.

2. Какой угол образуют стрелки часов в 12 ч 20 мин?

3. Расшифруйте пример на сложение, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры. Объясните, как вы рассуждали.

$$\begin{array}{r} \text{ААБ} \\ +\text{АБА} \\ \text{БАА} \\ \hline \text{БВВБ} \end{array}$$

4. Сколькими нулями оканчивается произведение:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot 2012?$$

5. Прямоугольник разделен двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трех из которых 2 см^2, 4 см^2, 6 см^2. Найдите площадь прямоугольника (рис. 51).

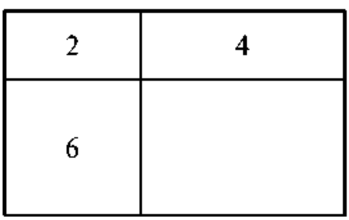


Рис. 51

6. Отцу и двум его сыновьям вместе 48 лет. Через 5 лет возраст отца будет в два раза больше суммы возрастов его сыновей, а Коле будет столько лет, сколько Юре сейчас. Сколько лет отцу, Коле и Юре?

Вариант 4 (5 класс)

1. Не выполняя умножения, найдите частное:

$$(1003 \cdot 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002).$$

2. У Кенгуру насморк. Он пользуется квадратными платками размером 25×25 см. За восемь дней Кенгуру израсходовал 3 м^2 ткани. Сколько платков в день тратил Кенгуру?

3. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{КИС} \\ +\,\text{КСИ} \\ \hline \text{ИСК} \end{array}$$

(Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры.)

4. Две чашки и два кувшина весят столько, сколько 14 блюдец. Один кувшин весит столько, сколько 1 чашка и 1 блюдце. Сколько блюдец уравновесят кувшин?

5. Три друга — Винни-Пух, Пятачок и Кролик — пошли гулять в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же цветов. У Винни-Пуха цвет рубашки и туфель совпадал, у Пятачка ни туфли, ни рубашка не были красными, а Кролик был в зеленых туфлях. Как были одеты друзья?

6. Разделите квадрат размером 5×5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно только по сторонам квадратов.

Вариант 5 (6 класс)

1. В бассейне с горизонтальным дном размером 20×50 м находится 100 000 л воды. Можно ли в этом бассейне проводить соревнования по плаванию?

2. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{АББВ} \\ +\,\text{АББВ} \\ \hline \text{ВББС} \end{array}$$

Найдите все возможные варианты. (Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.)

3. Отец старше сына в 4 раза, при этом суммарный их возраст составляет 50 лет. Через сколько лет отец станет старше сына в 3 раза?

4. Бабушка подарила каждому внуку по несколько яблок и груш, причем всем досталось поровну фруктов. Внуку Пете досталась пятая часть всех яблок и седьмая часть всех груш. Сколько внуков у бабушки? Ответ объясните.

5. Счетчик автомобиля показывал 12921 км. Через два часа счетчик стал показывать число, которое одинаково читалось в обоих направлениях. С какой скоростью ехал автомобиль?

6. Разрежьте (по линиям сетки) данную фигуру (рис. 52) на 3 равные части.

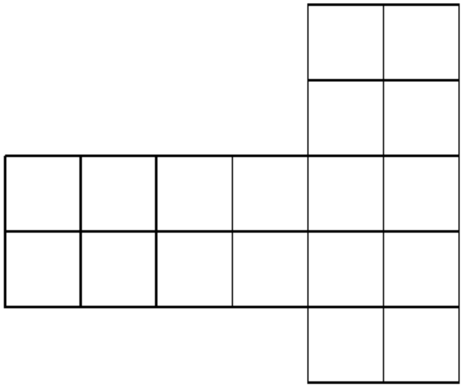


Рис. 52

Вариант 6 (7 класс)

1. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 12 ч 40 мин?

2. Какое из чисел: $\dfrac{7777777773}{7777777778}$ или $\dfrac{8888888882}{8888888887}$ — больше? Ответ объясните.

3. Произведение двух натуральных чисел равно 1000. Найдите сумму данных чисел, если известно, что каждое из них не делится нацело на 10.

4. Одна из цифр четырехзначного натурального числа равна нулю. При вычеркивании нуля это число уменьшается в 9 раз. На каком месте стоит нуль? Найдите все такие числа.

5. Учитель математики, проверив контрольные работы у трех друзей: Алексея, Бориса и Василия, сказал им: «Все вы написали работу, причем получили разные отметки («3», «4», «5»). У Василия — не «5», у Бориса — не «4», а у Алексея, по-моему, «4». Впоследствии оказалось, что учитель ошибся: одному ученику сказал отметку верно, а другим двум — неверно. Какие отметки получил каждый из учеников?

Вариант 7 (8 класс)

1. На какую цифру оканчивается число $3^{2012} + 4^{2011}$?

2. Число 2012 представьте в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

3. Дан угол в 34°. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в 12°? Если да, то обосновать; если нет, то почему?

4. Три брата — Александр, Борис и Сергей — преподают различные предметы в школах Архангельска, Северодвинска и Котласа. Александр работает не в Архангельске, а Борис — не в Северодвинске. Архангелогородец преподает не математику. Тот, кто работает в Северодвинске, преподает химию. Борис преподает физику. Какую дисциилину преподает Сергей и в школе какого города?

5. Аня младше Вани. Когда Ване было столько лет, сколько Ане сейчас, их матери было на 3 года меньше, чем Ане с Ваней теперь. Сколько лет было Ване, когда матери было столько лет, сколько Ване теперь?

Вариант 8 (5 класс)

1. От двух станций, расстояние между которыми 25,6 км, одновременно в одном направлении вышли два поезда. Впереди двигался поезд со скоростью 58,4 км/ч, и через 4 ч его догнал второй поезд. Найдите скорость второго поезда.

2. До царя Гороха дошла молва, что кто-то из троих богатырей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явиться ко двору, и молвили они:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».

Добрыня Никитич: «Змея убил Алеша Попович».

Алеша Попович: «Я убил змея».

При этом оказалось, что один из них сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

3. Расшифруйте следующую запись примера на сложение, в котором разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым буквам, одинаковые:

$$\begin{array}{r} \text{СПОРТ} \\ +\ \text{СПОРТ} \\ \hline \text{КРОСС} \end{array}$$

4. Лев поручил лисе посчитать, сколько в лесу медведей, зайцев и волков. После подсчета лиса доложила, что всего медведей, зайцев и волков в лесу 100, но волков на 25 больше, чем медведей; зайцев на 30 больше, чем волков. Один из зайцев, услышав такой ответ, расхохотался и сказал, что такого быть не может. Кто прав: лиса или заяц, и почему?

5. Вычислите: $89\,089\,089\,089 \cdot 7373 - 73\,073\,073\,073 \cdot 8989$.

Вариант 9 (5 класс)

1. Найдите значение выражения:

$$2012 - 2011 + 2010 - 2009 + 2008 - \ldots + 2 - 1.$$

2. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{А} \\ +\ \text{ББ} \\ \text{А} \\ \hline \text{ССС} \end{array}$$

3. Разделите прямоугольник 3×4 (рис. 53) на две равные части. Найдите как можно больше способов. Разрезать можно лишь по стороне квадрата 1×1, способы считаются разными, если получаемые фигуры не будут равными.

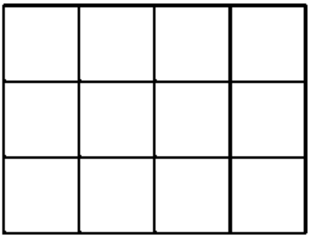


Рис. 53

4. Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович вступили в бой с великанами. Получив по три удара богатырскими палицами, великаны обратились в бегство. Больше всего ударов нанес Илья Муромец — 7, меньше всех — Алеша Попович — 3. Сколько всего было великанов?

5. Митя, Сеня, Толя, Юра и Костя пошли на концерт и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он бы оказался между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конец очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?

Вариант 10 (6 класс)

1. Решите уравнение: $-\frac{7}{9} : 0{,}6 = x : 5{,}4$.

2. Дядя Федор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Федором и котом, то кот окажется крайним слева. В каком порядке они сидят?

3. В классе 30 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше чем 3 ученика этого класса?

4. В рисе содержится 75% крахмала, а в ячмене — 60%. Сколько надо взять ячменя, чтобы в нем содержалось столько крахмала, сколько его содержится в 9 кг риса?

5. Какой цифрой оканчивается число 2^{2011}?

Вариант 11 (6 класс)

1. Вычислите:

$$\frac{666\,666 \cdot 666\,666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} - \frac{777\,777 \cdot 777\,777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}.$$

2. Сережа пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Сережа делает 5 выстрелов и за каждое попадание в цель получает право сделать еще 2 выстрела. Сережа сделал 17 выстрелов. Сколько раз он попал в цель?

3. *Задача в стихах*

Кросс осенний вспоминая,
Спорят белки два часа:
— Победил в забеге заяц,
А второй была лиса!
— Нет, твердит другая белка —
Ты мне шутки эти брось.
Заяц был вторым, конечно,
Первым был, я помню, лось.
— Я, — промолвил филин важный, —
В спор чужой не стану лезть.
Но у вас в словах у каждой
По одной ошибке есть.
Белки фыркнули сердито,
Неприятно стало им.
Вы уж, взвесив все, решите,
Кто был первым, кто вторым.

4. Можно ли выбрать из таблицы 5 чисел, сумма которых делилась бы на 20?

1	1	1
3	3	3
5	5	5
7	7	7

5. Буратино отпил полчашки черного кофе и долил ее молоком. Потом он отпил $\frac{1}{3}$ чашки и опять долил ее молоком. Затем он отпил $\frac{1}{6}$ чашки и снова долил ее молоком. Наконец Буратино допил содержимое чашки до конца. Чего Буратино выпил больше: кофе или молока?

6. В ряд выписаны 12 девяток:

$$9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9.$$

Поставьте между ними знаки: +, –, :, ×, скобки, так чтобы получилось число 2000. Представьте как можно больше способов.

Вариант 12 (7 класс)

1. Вычислите $8\frac{16}{23}x^2y^3 - 0{,}02x^3y^2$, если x равен наибольшему целому числу, заключенному между числами $-9{,}3$ и $-15{,}1$, а y — наименьшему простому числу в третьем десятке натуральных чисел.

2. Если товар подорожает сначала на 10%, а затем подешевеет на 10%, то когда его цена будет ниже: до подорожания или после снижения?

3. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 32°. Найдите угол между основанием и высотой, проведенной из вершины угла при основании.

4. Игра-лотерея проводится следующим образом. Выбирается случайное число от 1 до 1000. Если оно делится на 2, платят 1 рубль; если делится на 10 — 2 рубля; если на 12 — 4 рубля; на 20 — 8 рублей; если оно делится на несколько этих чисел, то платят сумму. Сколько можно выиграть (за один раз) в такой игре?

5. Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 4 ч 22 мин.

6. В ряд выписаны 12 восьмерок:

$$8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8.$$

Поставьте между ними знаки: +, –, :, ×, скобки, так чтобы получилось число 2000. Представьте как можно больше способов.

Вариант 13 (7 класс)

1. После семи стирок длина, ширина и толщина куска мыла уменьшились вдвое. На сколько таких же стирок хватит оставщегося мыла?

2. Три брата имеют звания: капитан, старщина и сержант. Из трех утверждений: «Алексей — старщина», «Владимир не старщина», «Семен не сержант» — лищь одно верное. Какое звание имеет каждый из братьев?

3. Предприниматель продал 109 кг черники, расфасованной в 20 ящиков двух типов: по A кг и по 3 кг. Сколько было ящиков по A кг, если A не больще 50?

4. Докажите, что $1+2+2^2+\ldots+2^{2011}+2^{2012}$ не делится на 3.

5. Вычислите наиболее рациональным способом:

$$1 : \left[6\frac{1}{119}\cdot 4\frac{1}{117} - 2\frac{188}{117} - \frac{1}{13}\right].$$

6. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, втрое меньще больщего катета.

Вариант 14 (8 класс)

1. Упростите выражение:

$$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{1}{b+a}.$$

2. На сторонах AB, BC, CA равностороннего треугольника ABC взяты соответственно точки D, E, F так, что $AD = BE = CF$. Каков вид треугольника DEF? Докажите.

3. Рещите ребус:

$$\begin{array}{r} \text{УДАР} \\ +\ \text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАКА} \end{array}$$

(Одинаковыми буквами обозначают одинаковые цифры, разными — разные.)

4. Из города A в город B корабль плывет по реке одни сутки, а обратно — трое суток. За какое время можно добраться из города A в город B на плоту?

5. Какой цифрой оканчивается число 3^{2011}?

6. Решите уравнение в натуральных числах:

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{7}.$$

Вариант 15 (8 класс)

1. Расшифруйте запись примера на сложение, где одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными — разные.

$$\begin{array}{r} \text{АБВГ} \\ +\,\text{АБВГ} \\ \hline \text{ВГДБГ} \end{array}$$

2. Три землекопа за три часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

3. За первый год после образования число членов партии «зеленых» в городе Коряжме увеличилось на n человек, а за второй — на 300 человек. При этом известно, что за первый год число членов партии увеличилось на 300%, а за второй — на $n\%$. Сколько членов партии было первоначально?

4. Решите уравнение: $|x + 2| = 2 \cdot (3 - x)$.

5. В прямоугольнике $ABCD$ вершину A соединили с серединами сторон BC и CD. Может ли один из отрезков оказаться вдвое длиннее другого?

Вариант 16 (8 класс)

1. Представьте в виде рациональной дроби: $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}}$.

2. Решите ребус:

$$\begin{array}{rl}
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l}***\,****\\ \underline{***}\end{array}\\
-\begin{array}{r}**\\ \underline{**}\end{array}\\
-\begin{array}{r}***\\ \underline{***}\end{array}\\
0
\end{array}
&
\begin{array}{|l}
\\ \hline **8\\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}$$

3. Когда у Маши было две взрослые кошки и шенок Барбос и все они ели поровну, то мешка корма хватало для животных на 6 дней. Барбос вырос, и мешка стало хватать на 4 дня. Потом Маша завела еще собаку Жучку, и мешка корма стало хватать только на три дня. Кто ест больше: кошка или собака Жучка — и во сколько раз?

4. Решите уравнение: $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$.

5. Проверьте равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=9.$$

6. Разделите прямой угол на три равные части с помощью циркуля и линейки.

РЕШЕНИЯ

Вариант 1

1. $\dfrac{2004-2003+2002-2001+\ldots+2-1}{2004\cdot 45+55\cdot 2004}=$

$$=\frac{1002}{2004(45+55)}=\frac{1002}{2004\cdot 100}=\frac{1}{200}.$$

Замечание. Так как не по всем учебникам математики к моменту проведения олимпиады изучена тема «Сокращение дробей», то ответ можно оставить и в виде $\dfrac{1002}{200\,400}$.

2. Для нумерации страниц с первой по девятую понадобятся 9 цифр, для нумерации страниц с 10-й по 99-ю понадобятся $90 \cdot 2 = 180$ (цифр). Итак, использовано 189 цифр. Осталось $204 - 189 = 15$. Так как с сотой страницы на нумерацию одной страницы потребуются 3 цифры, то всего страниц в книге будет $99 + 15 : 3 = 99 + 5 = 104$.

(*Ответ:* в книге 104 страницы.)

3. Ответ на рис. 54.

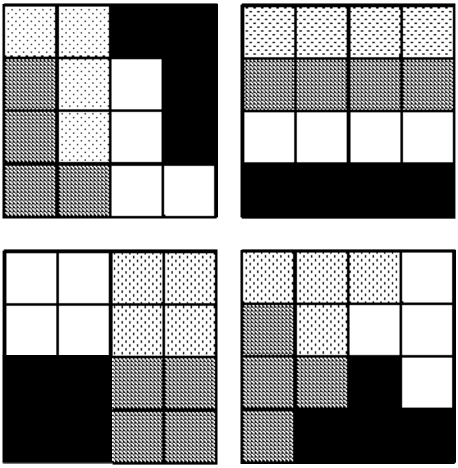


Рис. 54

4. Так как в квартирах № 1 и 2 жил не черный кот, то черный кот жил в квартире № 3. Так как белый кот жил не в квартире № 1, а квартира № 3 занята черным котом, то белый кот живет в квартире № 2. Тогда рыжий кот живет в квартире № 1.

(*Ответ:* в квартире № 1 жил рыжий кот; в квартире № 2 жил белый кот; в квартире № 3 жил черный кот.)

5. Решаем задачу с конца.

1) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 3$ (конфеты) — осталось после Коли;

2) $\left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 7$ (конфет) — осталось после Ани;

3) $\left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 15$ (конфет) — осталось после Феди;

4) $\left(15+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=31$ (конфета) — была в коробке.

(*Ответ:* в коробке была 31 конфета.)

6. Пусть $2x$ кг весит туловище щуки, тогда голова будет весить $(x+1)$ кг. Из условия, что туловище весит столько же, сколько голова и хвост вместе, получим уравнение: $2x = x + 1 + 1$. Откуда $x = 2$, а вся щука будет весить 8 кг.

(*Ответ:* щука весила 8 кг.)

Вариант 2

1. Возможный вариант:

$$5\cdot5\cdot5\cdot5+5\cdot5\cdot5\cdot5+5\cdot5\cdot5\cdot5+5\cdot5\cdot5+5+5:5-5:5-5:5.$$

2. $3003\cdot207$.

3. Ответ на рис. 54.

4. Решаем задачу с конца. Так как 4 яблока составляют треть от того, что осталось после Бори, то весь остаток будет 12 яблок. Но 12 яблок составляют $\frac{2}{3}$ яблок, оставшихся после Андрея, значит, после Андрея остались 18 яблок, которые, в свою очередь, составляют $\frac{2}{3}$ числа яблок, купленных мамой.

Значит, мама купила $18:2\cdot3=27$ (яблок).

(*Ответ:* мама купила 27 яблок.)

5. При первом взвешивании положим на левую чашку 200 г и уравновесим весы с помощью крупы, тогда крупы на левой чашке будет 4400 г, а на правой — 4600 г. Теперь 4400 г разделим пополам: тогда на каждой чашке будет по 2200 г крупы. При третьем взвешивании отвесим с помощью гири 200 г крупы, тогда получим массу оставшейся крупы в одной из кучек 2000 г = 2 кг.

6. Найдем число концов у всех мостов:

$$5+4\cdot4+3\cdot3+1=31,$$

это число нечетно. Так как число концов у всех мостов должно быть четным, то такого расположения мостов быть не может.

Вариант 3

1. $3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot 5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}=3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-\left(2-\frac{1}{117}\right)\times$ $\times\left(6-\frac{1}{119}\right)-\frac{5}{119}=\left(3+\frac{1}{117}\right)\cdot\left(4+\frac{1}{119}\right)-12+\frac{6}{117}+\frac{2}{119}-$ $-\frac{1}{117\cdot 119}-\frac{5}{119}=12+\frac{4}{117}+\frac{3}{119}+\frac{1}{117\cdot 119}-12+\frac{6}{117}+\frac{2}{119}-$ $-\frac{1}{117\cdot 119}-\frac{5}{119}=\frac{10}{117}.$

2. В 12.00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит треть окружности, то есть описывает угол в 120°. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (так как описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол в 120° : 12 = 10° и будет образовывать с минутной стрелкой угол в 120° – 10° = 110°.

3. Так как сумма Б + А + А оканчивается цифрой Б, то А + А оканчивается цифрой 0. Поэтому А = 5. (Цифра А не может быть 0, потому что с нее начинаются первые два слагаемых.) Тогда сумма 55Б + 5Б5 + Б55 не больше чем 559 + 595 + 955 = 2109. Поэтому Б = 1 или Б = 2. Но 552 + 525 + 255 = 1312 — не подходит. Значит, Б = 1. Отсюда ответ: 551 + 515 + 155 = 1221.

4. Нули образуются от перемножения четных чисел и пятерок. Посчитаем число пятерок в произведении. В каждом множителе, стояшем на 5-м, 10-м, ..., 2010-м местах, есть, как минимум, одна пятерка. Получили 2010 : 5 = 402 (пятерки). Но в числах 25, 50, ..., 2000 будет по 2 пятерки. Значит, надо добавить еше 2000 : 25 = 80 (пятерок). В числах 125, 250, ..., 2000 содержится в качестве множителя по 3 пятерки, значит, добавляем еще 2000 : 125 = 16 (пятерок). В числах 625, 1250, 1875 — по 4 пятерки. Поэтому добавляем еще 3 пятерки. Итого имеем 402 + 80 + 16 + 3 = 501. При умножении их на четные числа (а их больще, чем 501) получим, что заданное произведение оканчивается 501 нулем.

5. Так как верхние прямоугольники имеют общую сторону и площадь правого в 2 раза больще, то и его вторая сторона будет в 2 раза больще. Аналогично и вторая сторона правого нижнего прямоугольника будет больше стороны верхнего левого прямоугольника в 3 раза. А это означает, что площадь нижнего правого четырехугольника будет в 6 раз больше площади левого верхнего прямоугольника, то есть будет равна 12 см^2. Поэтому площадь всего прямоугольника будет равна 24 см^2.

6. Через 5 лет отцу и сыновьям вместе будет $48 + 5 \cdot 3 = 63$ (года). Так как через 5 лет возраст отца будет в 2 раза больше суммы возрастов его сыновей, то отцу будет 42 года, а сыновьям вместе 21 год. Поэтому сейчас отцу 37 лет, а Коле и Юре вместе 11 лет. Пусть Коле сейчас x лет. Поскольку Коле через 5 лет будет столько лет, сколько Юре сейчас, то он на 5 лет младше Юры. Значит, $x + x + 5 = 11$, откуда $x = 3$. Таким образом, сейчас Юре 8 лет, а Коле 3 года.

Вариант 4

1. $(1003 \cdot 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002) =$
$= ((1002 + 1) \cdot 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002) =$
$= (1002 \cdot 2005 + 2005 - 1002) : (1003 + 2005 \cdot 1002) =$
$= (1002 \cdot 2005 + 1003) : (1003 + 2005 \cdot 1002) = 1.$

2. 1) $25 \times 25 = 625$ (см^2) — площадь одного платка;

2) 3 м$^2 = 30\,000$ см^2;

3) $30\,000 : 625 = 48$ (платков) — израсходовал Кенгуру за 8 дней;

4) $48 : 8 = 6$ (платков).

(*Ответ:* 6 платков тратит Кенгуру в один день.)

3. $495+459 = 954$. Начнем с цифр десятков: И = 0 или И = 9. Первый случай не подходит, так как С + И = К. Таким образом, И = 9, тогда К = 4, соответственно, С = 5.

4. Задача имеет множество решений. Рассмотрим один из возможных.

Так как 2 чашки и 2 кувшина уравновесят 14 блюдец, то 1 чашка и 1 кувшин уравновесят 7 блюдец. Так как 1 кувшин весит столько, сколько 1 чашка и 1 блюдце, то 2 чашки и 1 блюдце весят столько, сколько 7 блюдец. Отсюда получим, что 1 чашка весит столько, сколько 3 блюдца. Значит, 1 кувшин уравновесят 4 блюдца.

5. Узнаем сначала цвет туфель друзей. Так как у Кролика туфли были зелеными, а у Пятачка не красными, то красные туфли были у Винни-Пуха, а тогда синие будут у Пятачка. Так как у Винни-Пуха цвет рубашки и туфель совпадал, а туфли были красными, то и рубашка будет красная. Так как у Пятачка ни туфли, ни рубашка не были красными, а туфли оказались синими, то рубашка могла быть только зеленая. Поэтому у Кролика будет синяя рубашка.

6. Всего существует 7 способов (рис. 55).

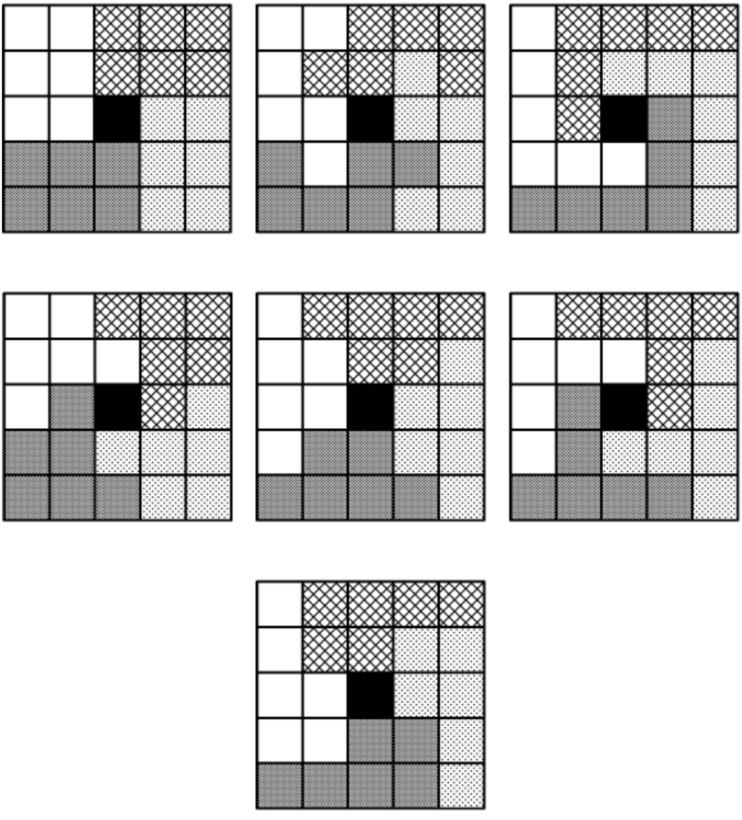


Рис. 55

Вариант 5

1. $100\,000$ л $= 100\,000$ дм$^3 = 100$ м^3. Площадь бассейна равна 1000 м^2. Значит, глубина бассейна составит 0,1 м (или $\frac{1}{10}$ м). При такой глубине соревнования провести нельзя.

2. $2004 + 2004 = 4008$, или $1002 + 1002 = 2004$, или $2995 + 2995 = 5990$, или $3997 + 3997 = 7994$.

3. Обозначим возраст сына за x лет, тогда возраст отца будет $4x$. Так как суммарный их возраст составляет 50 лет, то имеем уравнение $x + 4x = 50$. Из уравнения получаем $x = 10$. Итак, вначале сыну было 10 лет, а отцу 40 лет. Пусть отец станет старше сына в 3 раза через n лет, тогда $3\cdot(10+n) = 40+n$. Решением уравнения будет $n = 5$. Отец будет старше сына в 3 раза через 5 лет.

4. Если бы Пете досталась не седьмая, а пятая часть всех груш, то он получил бы пятую часть всех фруктов. Но это больше, чем он получил на самом деле. Значит, на самом деле доля каждого внука составляет меньше пятой части всех фруктов. Поэтому внуков больше пяти. С другой стороны, если бы Пете досталась седьмая часть всех яблок, он получил бы седьмую часть всех фруктов. Но это меньше, чем он получил на самом деле. Поэтому внуков меньше семи. А если внуков больше пяти, но меньше семи, то их шесть.

5. Через два часа счетчик автомобиля будет показывать число, которое начинается на 13 и оканчивается на 31, так как следующая возможная пара: 14 и 41 — не будет удовлетворять условию задачи (за 2 часа автомобиль не может проехать больше 1000 км). Таким образом, получаем число $13*31$. Определим, какая цифра может стоять в разряде сотен. Для этого рассмотрим все возможные варианты.

1) $13\,031 - 12\,921 = 110$ (км),

$110 : 2 = 55$ (км/ч) — скорость автомобиля;

2) $13\,131 - 12\,921 = 210$ (км),

$210 : 2 = 105$ (км/ч) — скорость автомобиля;

3) $13\,231 - 12\,921 = 310$ (км),

$310 : 2 = 155$ (км/ч) — скорость автомобиля;

4) $13\,331 - 12\,921 = 410$ (км),

$410 : 2 = 205$ (км/ч) — скорость автомобиля. Данный случай и все остальные являются нереальными, поэтому не подходят.

(*Ответ:* 55 км/ч, или 110 км/ч, или 155 км/ч.)

6. Решение показано на рис. 56.

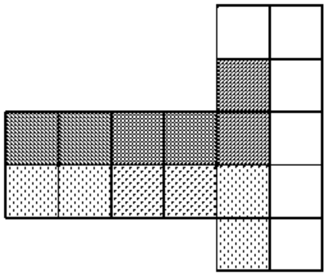


Рис. 56

Вариант 6

1. В 12.00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 40 минут минутная стрелка проходит $\frac{2}{3}$ окружности, то есть описывает угол в 240°. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (так как описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 40 минут опишет угол в $240° : 12 = 20°$ и будет образовывать с минутной стрелкой угол в $240° - 20° = 220°$, или $360° - 220° = 140°$.

2. Преобразуем данные два числа:

$$A = \frac{7777777773}{7777777778} = 1 - \frac{5}{7777777778};$$
$$B = \frac{8888888882}{8888888887} = 1 - \frac{5}{8888888887};$$

далее

$$8888888887 > 7777777778 \Rightarrow \frac{5}{8888888887} < \frac{5}{7777777778} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{5}{8888888887} > 1 - \frac{5}{7777777778}.$$

Следовательно, $B > A$.

3. Так как $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, то каждое из чисел в своем разложении на простые множители может содержать только двойки и пятерки. Так как оба числа на 10 не делятся, то множители 2 и 5 не могут присутствовать в разложении каждого из чисел на простые множители. Тогда первое число будет 125, а второе — 8. И сумма их будет равна 133.

(*Ответ:* 133.)

4. Четырехзначное число, одна из цифр которого 0, может иметь вид: $a0bc$, $ab0c$, $abc0$. Последний случай невозможен, так как при вычеркивании нуля число $abc0$ уменьшится в 10 раз. Используя условие задачи, имеем: $a0bc = abc \times 9$. Из данного равенства получим, что $c = 5$. Тогда $a0b5 = ab5 \times 9$. Найдем b. Так как $9b + 4$ оканчивается на b, то $b = 2$ или 7. Для первого случая получаем равенство: $a025 = a25 \times 9$. Из данного равенства подбором находим $a = 2$. Получили число 2025. Проводя аналогичные рассуждения для $b = 7$, найдем $a = 6$, а число получим 6075. Для случая $ab0c$ решений нет.

(*Ответ:* ноль стоит на месте сотен, числа: 2025 и 6075.)

5. Рассмотрим три случая.

1-й случай. Пусть учитель сказал верно Алексею. Значит, у Алексея «4». Так как Борису и Василию учитель назвал неверные отметки, то у Бориса «4», а у Василия «5». Получилось, что у двух учеников оказались одинаковые отметки, что противоречит условию задачи. Данный случай невозможен.

2-й случай. Пусть учитель сказал верно Василию. Тогда у Василия отметка не «5». Так как учитель сказал неверно об отметках Алексея и Бориса, то у Алексея отметка не «4», а у Бориса «4». Тогда у Алексея будет отметка «5», а у Василия «3».

3-й случай. Рассмотрим предположение, что учитель сказал верно про отметку Борису. Тогда Борис получил не «4». Так как утверждения про отметки Алексея и Василия ложные, то Алексей получил отметку не «4», а Василий — «5». Получается, что отметку «4» не получил ни один из учеников. Этот случай также противоречит условию задачи.

Таким образом, Алексей получил отметку «5», Борис — «4», а Василий — «3».

Вариант 7

1. Найдем последнюю цифру 3^n при различных значениях n: 3; 9; 7; 1; 3; 9; ... Замечаем зависимость: через 4 числа цифра повторяется. Так как $2012 = 503 \cdot 4 + 0$, то число 3^{2012} оканчивается такой же цифрой, что и 3^4, то есть 1. Рассматривая различные степени числа 4, получаем зависимость: если показатель степени n четный, то 4^n оканчивается на 6, а если нечетный, то 4^n оканчивается на цифру 4. Так как 2011 — число нечетное, то 4^{2011} оканчивается на цифру 4, а значит, и число $3^{2012} + 4^{2011}$ оканчивается на цифру 5.

2. Так как $2012 = 4 \cdot 503$, а $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, то для нахождения решения задачи надо найти решения следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 2012, \\ a - b = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 1006, \\ a - b = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 503, \\ a - b = 4. \end{cases}$$

Только вторая система имеет решение в целых числах: $a = 504$, $b = 502$.

3. Один из возможных вариантов. Построить угол 90° с помощью циркуля и линейки, затем от одной из сторон угла 3 раза отложить угол 34°, а именно: $12° = 34° \cdot 3 - 90°$.

4. В данной задаче говорится о трех братьях (Александр, Борис и Сергей), городах, в которых они работают (Архангельск, Северодвинск и Котлас), и предметах, которые они преподают (математика, химия, физика).

Определим сначала предметы, которые преподают братья. Составим таблицу.

	Математика	Химия	Физика
Архангелогородец			
Северодвинец			
Котлашанин			

Так как архангелогородец преподает не математику, то поставим минус в соответствующей клетке. Так как северодвинец преподает химию, то поставим плюс. Поэтому северодвинец не может преподавать математику и физику, а архангелогородец и котлашанин — химию. В итоге получим такую таблицу.

	Математика	Химия	Физика
Архангелогородец	–	–	
Северодвинец	–	+	–
Котлашанин		–	

Из данных таблицы следует, что архангелогородец преподает физику, а значит, математику преподает котлашанин.

Теперь выясним имена братьев. Для этого снова воспользуемся таблицей. Учтем, что Александр работает не в Архангельске, а Борис — не в Северодвинске.

	Александр	Борис	Сергей
Архангелогородец	–		
Северодвинец		–	
Котлашанин			

Так как по условию задачи Борис преподает физику, а из предыдущих рассуждений стало ясно, что архангелогородец преподает физику, то выходит, что Борис живет в Архангельске. Учитывая это, получим следующую таблицу.

	Александр	Борис	Сергей
Архангелогородец	–	+	–
Северодвинец		–	
Котлашанин		–	

Больше никаких сведений о зависимости между именем и городом у нас нет. Рассмотрим два возможных случая.

1-й случай. Пусть Александр работает в Северодвинске. Тогда Сергей будет работать в Котласе.

2-й случай. Пусть Александр работает в Котласе. Тогда Сергей будет работать в Северодвинске.

Оба случая возможны. Таким образом, Сергей работает в Котласе учителем математики или в Северодвинске учителем химии.

5. Пусть Ане сейчас a лет, Ване — b лет, маме — c лет. Ване было a лет, то есть столько, сколько сейчас Ане, $(b-a)$ лет назад. Но маме тогда было $c-(b-a)=c+a-b$ (лет), и это число равно $a+b-3$. Таким образом, $c=2b-3$. Маме было b лет, то есть столько, сколько Ване теперь, $(c-b)$ лет назад, но Ване тогда было $b-c+b=2b-c=3$ (года). Итак, Ване было 3 года.

Вариант 8

1. 1) $58{,}4\cdot 4=233{,}6$ (км) — расстояние, пройденное первым поездом за 4 ч.

2) $233{,}6+25{,}6=259{,}2$ (км) — расстояние, пройденное вторым поездом за 4 ч.

3) $259{,}2:4=64{,}8$ (км/ч) — скорость второго поезда.

(*Ответ:* 64,8 км/ч.)

2. Добрыня Никитич.

3.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}43972\\43972\end{array}\\ \hline 87944\end{array}$$

С = 4; П = 3; Т = 2; Р = 7; К = 8; О = 9.

4. Заяц. Так как зайцев на 30 больше, чем волков, то без 30 зайцев животных в лесу будет 70, причем зайцев и волков будет поровну. Так как волков на 25 больше, чем медведей, то с 25 дополнительными медведями в лесу животных будет 95, причем всех животных будет поровну. Но 95 на 3 не делится. Значит, лиса не права.

5. $89\,089\,089\,089\cdot 7373-73\,073\,073\,073\cdot 8989=$
$=89\cdot 1\,001\,001\,001\cdot 73\cdot 1001-73\cdot 1\,001\,001\,001\cdot 89\cdot 1001=0.$

Вариант 9

1. Заметим, что разность чисел 2012 и 2011 равна 1, аналогично разность чисел 2010 и 2009 равна 1 и т.д. Всего таких разностей будет $2012:2=1006$. В результате получается, что значение выражения равно 1006.

2.

$$\begin{array}{r} 6 \\ +99 \\ 6 \\ \hline 111 \end{array}$$

А = 6; Б = 9; С = 1.

3. Всего существует 5 вариантов (рис. 57).

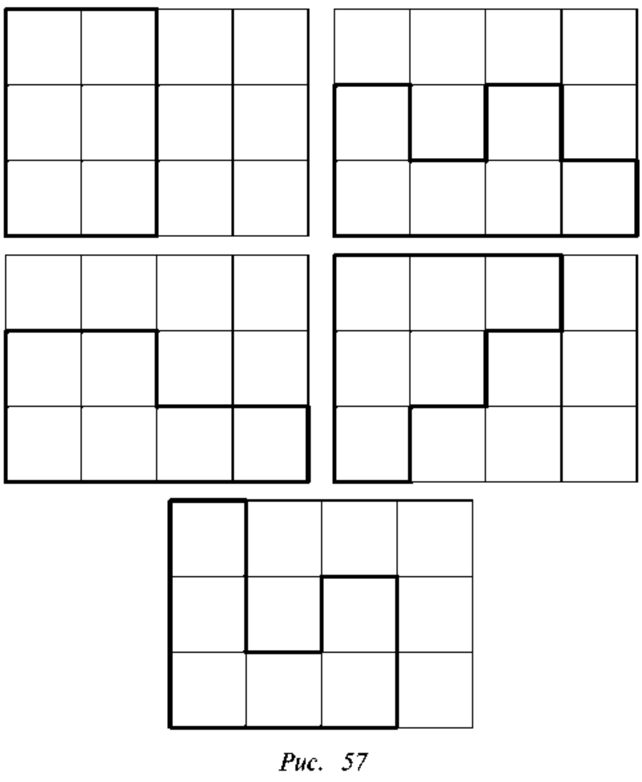


Рис. 57

4. Так как больше всего ударов нанес Илья Муромец — 7, а меньше всех — Алеша Попович, то Добрыня Никитич нанес от 4 до 6 ударов. Всего великанам нанесли от 14 до 16 ударов. Из этого промежутка только число 15 делится на 3. Следовательно, великанов было 5.

5. Митя, Толя, Сеня, Костя, Юра — первый вариант; Митя, Толя, Костя, Сеня, Юра — второй вариант.

Вариант 10

1. –7.

2. Слева направо: кот Матроскин, дядя Федор, почтальон Печкин, Шарик.

3. Пусть в каждом месяце дни рождения отмечают не более 2 учеников. Так как месяцев в году 12, то учеников в классе будет не более 24. Получили противоречие. Значит, найдется месяц, в котором отметят дни рождения не менее 3 учеников.

4. 1) $9 \cdot 0{,}75 = 6{,}75$ (кг) — содержится крахмала в 9 кг риса;

2) $6{,}75 : 0{,}6 = 11{,}25$ (кг) — надо взять ячменя.

(*Ответ:* 11,25 кг.)

5. Рассмотрим степени двойки: $2^1 = 2$; $2^2 = 4$, $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; $2^6 = 64$ и так далее. Замечаем закономерность, что цифры 2, 4, 8, 6 дальше повторяются. Так как $2011 = 502 \cdot 4 + 3$, значит, 2^{2011} оканчивается той же цифрой, что и 2^3, то есть цифрой 8.

Вариант 11

1. Сделаем преобразования:

$$\frac{666\,666 \cdot 666\,666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} - \frac{777\,777 \cdot 777\,777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1} =$$
$$= \frac{111\,111 \cdot 6 \cdot 111\,111 \cdot 6}{36} - \frac{111\,111 \cdot 7 \cdot 111\,111 \cdot 7}{49} =$$
$$= \frac{111\,111 \cdot 6 \cdot 111\,111 \cdot 6}{6 \cdot 6} - \frac{111\,111 \cdot 7 \cdot 111\,111 \cdot 7}{7 \cdot 7} =$$
$$= 111\,111 \cdot 111\,111 - 111\,111 \cdot 111\,111 = 0.$$

2. Сережа сделал $17 - 5 = 12$ призовых выстрелов, поэтому попаданий в цель было: $12 : 2 = 6$.

3. Первым был лось, второй — лиса, третьим — заяц.

4. Нет, так как сумма пяти нечетных чисел является числом нечетным, а нечетное число на 20 не делится.

5. Общее количество жидкости, выпитой Буратино, равно $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1=2$ (чашки). А изначально черного кофе была одна чашка. Поэтому количество молока и кофе, выпитых Буратино, одинаково.

6. Например:

$$(9999:9-999:9)\cdot(9+9):9; \quad 999+999+(9:9)\cdot(9:9)+9:9.$$

Вариант 12

1. Наибольшее целое число, заключенное между $-9{,}1$ и $-15{,}1$, есть -10, а наименьшее простое число в третьем десятке натуральных чисел есть 23. Подставив данные значения вместо x и y, после упрощений получим 10 590 580.

2. Цена будет ниже после снижения.

3. Данный внешний угол не может быть при основании равнобедренного треугольника, так как в этом случае сумма внутренних углов треугольника была бы больше 180°. Значит, данный внешний угол находится при вершине. Тогда смежный с ним внутренний угол треугольника будет равен 148°, соответственно, углы при основании будут по 16°. Значит, угол между основанием треугольника и высотой треугольника, проведенной из вершины угла при основании, будет равен $180° - 90° - 16° = 74°$.

4. 15 рублей.

5. Искомый угол будет равен разности углов AOB и AOC (рис. 58):

$$\angle AOB = \frac{360°}{12}\cdot 4 + \left(\frac{360°}{12}\right)\cdot\frac{22}{60} = 131°,$$

$$\angle AOC = \frac{360°}{60}\cdot 22 = 132°.$$

Значит, искомый угол равен 1°.

6. Например:

$$(8888:8-888:8)\cdot(8+8):8; \quad (8\cdot8\cdot8\cdot8-88-8):(8+8)\cdot8+8-8.$$

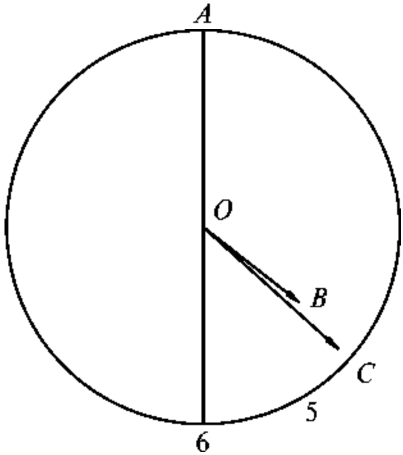


Рис. 58

Вариант 13

1. Так как длина, ширина и толщина куска мыла уменьшаются вдвое, то объем уменьшится в 8 раз. Так как было 7 стирок, то за 7 стирок объем уменьшился на $\frac{7}{8}$ своего объема, то есть за 1 стирку — на $\frac{1}{8}$ объема. Поэтому оставшегося мыла хватит на одну стирку.

2. Первое утверждение не может быть верным, так как в этом случае и второе будет верным. Значит, первое ложно, то есть Алексей не старшина. Пусть верно второе утверждение: «Владимир не старшина», тогда ложны первое и третье утверждения. Поэтому, Алексей не старшина, а Семен — сержант. Но тогда получается, что Владимир и Алексей — оба капитаны. Значит, такого варианта не может быть. Рассмотрим последний вариант: верно то, что Семен не сержант, а ложны первые 2 утверждения. Тогда Алексей не старшина, а Владимир — старшина. Тогда получается, что Семен — капитан, а Алексей — сержант. В этом случае противоречий нет.

3. Пусть x ящиков было по A кг, тогда трехкилограммовых ящиков было $(20 - x)$ штук. Так как всего ягод было 109 кг, то получаем уравнение: $Ax + 3(20 - x) = 109$, откуда $x(A - 3) = 49$, что означает, что x и $A - 3$ являются делителями 49. Так как $x < 20$, то $x = 1$ или $x = 7$. В первом случае получаем $A = 52$, что не удовлетворяет условию задачи (ящик не тяжелее 50 кг). А при $x = 7$ получаем $A = 10$. Итак, было 7 ящиков по 10 кг.

4. Рассмотрим сумму

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2011} + 2^{2012} =$$
$$= (1 + 2) + 2^2(1 + 2) + \ldots + 2^{2010}(1 + 2) + 2^{2012} =$$
$$= 3(1 + 2^2 + \ldots + 2^{2010}) + 2^{2012}.$$

В последней сумме первое слагаемое делится на 3, а второе слагаемое не делится на 3. Поэтому и вся сумма не делится на 3.

5. Пусть

$$x = \frac{1}{119}, \quad y = \frac{1}{117}.$$

Тогда

$$\frac{1}{13} = \frac{9}{117} = 9y$$

и искомое выражение равно

$$1 : \left[(6 + x)(4 + y) - (3 - x)(8 - y) - 9y\right] =$$
$$= 1 : [24 + 4x + 6y + xy - 24 + 8x + 3y - xy - 9y] =$$
$$= 1 : (12x) = \frac{119}{12} = 9\frac{11}{12}.$$

(*Ответ:* $9\frac{11}{12}$.)

6. Используя свойство угла 30° в прямоугольных треугольниках ABC, BDK, ACK (рис. 59), признаки равенства треугольников и свойства серединного перпендикуляра к отрезку, имеем: $CK = DK = \frac{1}{2}BK$, откуда

$DK = \frac{1}{3}BC$.

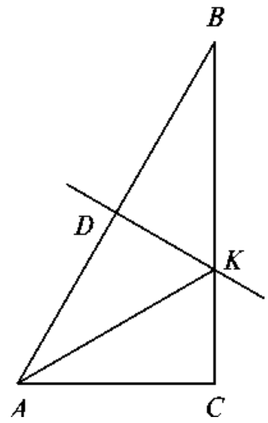


Рис. 59

Вариант 14

1. $\dfrac{2a^3}{a^4-b^4}$.

2. Треугольник является равносторонним.

3. Начнем с буквы У, У $\geqslant 5$. Д $=1$. Рассматривая различные варианты для У, получаем, что У $=8$, в итоге имеем:

$$\begin{array}{r} 8126 \\ +\,8126 \\ \hline 16252 \end{array}$$

4. За 3 сут.

5. Рассматривая различные степени числа 3, получаем зависимость: если показатель $n=4k+1$, то 3^n оканчивается цифрой 3; если же $n=4k+2$ — то цифрой 9; если $n=4k+3$ — то цифрой 7; если $n=4k$ —- то цифрой 1. Так как

$$2011 = 502\cdot 4+3,$$

то 3^{2011} оканчивается на цифру 7.

6. Представим $\dfrac{30}{7}$ как $4+\dfrac{2}{7}$. Так как x, y, z — натуральные числа и

$$y+\frac{1}{z}>1,$$

то $x = 4$ и

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{2}{7}.$$

Тогда

$$y + \frac{1}{z} = \frac{7}{2},$$

откуда $y = 3$, $z = 2$. Итак, $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$.

Вариант 15

1.

$$\begin{array}{r} 5210 \\ +\,5210 \\ \hline 10420 \end{array}$$

2. За 1 час 3 землекопа выкопают 1 яму, поэтому 6 землекопов за 1 час выкопают 2 ямы. Тогда за 5 часов эти же 6 землекопов выкопают 10 ям.

3. Пусть первоначально в партии было x членов. Тогда через год в партии будет

$$x + n = x + \frac{300}{100} \cdot x = 4x \text{ (членов).}$$

Из данного уравнения получаем $n = 3x$. Так как через год число членов партии увеличилось на 300, то их стало

$$4x + 300 = 4x + \frac{n}{100} \cdot 4x.$$

Из данного уравнения находим $nx = 7500$. Учитывая, что $n = 3x$, получаем $x = 50$.

(*Ответ:* первоначально в партии было 50 человек.)

4. $\frac{4}{3}$.

5. Обозначим стороны $AB = 2a$, $BC = 2b$ (рис. 60). Тогда

$$BM = a, \quad ND = b.$$

Применим теорему Пифагора к треугольникам ABM и AND:

$$AM^2 = 4a^2 + b^2, \quad AN^2 = 4b^2 + a^2.$$

Пусть $AN = 2AM$, тогда

$$AN^2 = 4AM^2,$$

откуда получаем, что $a = 0$, чего не может быть.

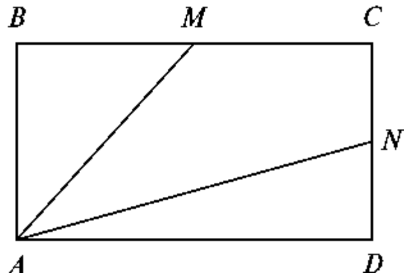


Рис. 60

Вариант 16

1. $$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{1}{1+\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x+1}{2x+1}.$$

2.

$$\begin{array}{r|l} 1089708 & 12 \\ \hline -108 & 90809 \\ \hline 97 & \\ -96 & \\ \hline 108 & \\ -108 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3. Будем считать, что каждый ел одну порцию, тогда за 6 дней они вместе съедали 18 порций — один мешок. Когда Барбос вырос, кошки по-прежнему съедали 2 порции в день, то есть за 4 дня они съедали 8 порций, а остальные 10 порций съедал Барбос, то есть он съедал в день 2,5 порции. Значит, за три дня они втроем съедали 13,5 порции. Следовательно, Жучка съедает за три дня 4,5 порции, то есть 1,5 порции в день. Таким образом, она ест в полтора раза больше, чем одна кошка.

(*Ответ:* Жучка съедает в 1,5 раза больше.)

4. 49.

5. Преобразуем левую часть равенства, домножив числитель и знаменатель каждой дроби на число, сопряженное знаменателю. В итоге получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}=$$
$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}=10-1=9.$$

6. Построим равносторонний треугольник *AKB* так, чтобы одна из его сторон *AB* лежала на стороне прямого угла, а одна из вершин *A* была в вершине прямого угла (рис. 61). Разделив пополам угол треугольника *KAB*, мы в результате разделим угол 90° на три равные части.

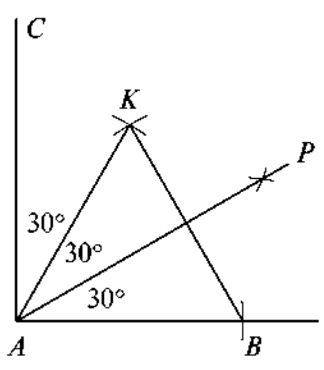


Рис. 61

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Раздел 1

Основные направления подготовки учащихся к математическим олимпиадам

I. Работа учителя математики на уроке 6
II. Внеклассная работа по математике 29
III. Внешкольная работа по математике 34
IV. Заочная работа 35

Раздел 2

Методика подготовки к математической олимпиаде на занятиях математического кружка

Организация работы кружка 37
Планирование работы кружка 38
Проведение занятий кружка 40
Подготовка кружкового занятия 43

Раздел 3

Разработки занятий для подготовки к олимпиадам

Занятие 1. Текстовые задачи-1 (задачи, решаемые с конца) 46
Занятие 2. Математические ребусы 51
Занятие 3. Инварианты 55
Занятие 4. Геометрические задачи-1 (разрезания) 61
Занятие 5. Повторение 65
Занятие 6. Математическое соревнование (математическая драка) 69
Занятие 7. Принцип Дирихле 73
Занятие 8. Текстовые задачи-2 (переливания) 79
Занятие 9. Логические задачи 82

Занятие 10. Текстовые задачи-3 (математические игры, выигрышные ситуации) 89
Занятие 11. Арифметические задачи 94
Занятие 12. Повторение 101
Занятие 13. Математическое соревнование (математическая карусель) 105
Занятие 14. Текстовые задачи-4 (задачи на движение) 111
Занятие 15. Взвешивания 117
Занятие 16. Геометрические задачи-2 122
Занятие 17. Итоговое (устная олимпиада) 132

Литература 139

Приложение. Тексты муниципальных олимпиад по математике 141
Решения 153

Учебно-методическое пособие

МАСТЕРСКАЯ учителя математики

Фарков Александр Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ
Методика подготовки
5–8 классы

Ответственный редактор *Владимир Черноруцкий*
Дизайн обложки *Анастасии Хомяк*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04.
Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 31.01.2012.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. листов 9,24. Тираж 5000 экз. Заказ №

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области
Сайт: www.chpk.ru, e-mail: marketing@chpk.ru
Факсы: 8 (49672) 6-25-36; 8 (499) 270-73-59
Отдел продаж услуг: 8 (499) 270-73-59 (многоканальный)

МАСТЕРСКАЯ учителя математики

Как эффективно подготовить учащихся к математической олимпиаде? Как заинтересовать детей? Какие формы работы со школьниками выбрать? Что такое олимпиадная задача и как такие задачи интегрировать в обычный урок?

Автор дает учителю практическое руководство по подготовке учащихся к олимпиадам на занятиях математического кружка. Выделение типичных задач и разбор их на регулярных занятиях – важная составляющая успешной работы учителя.

ISBN 978-5-408-01818-5

9 785408 018185